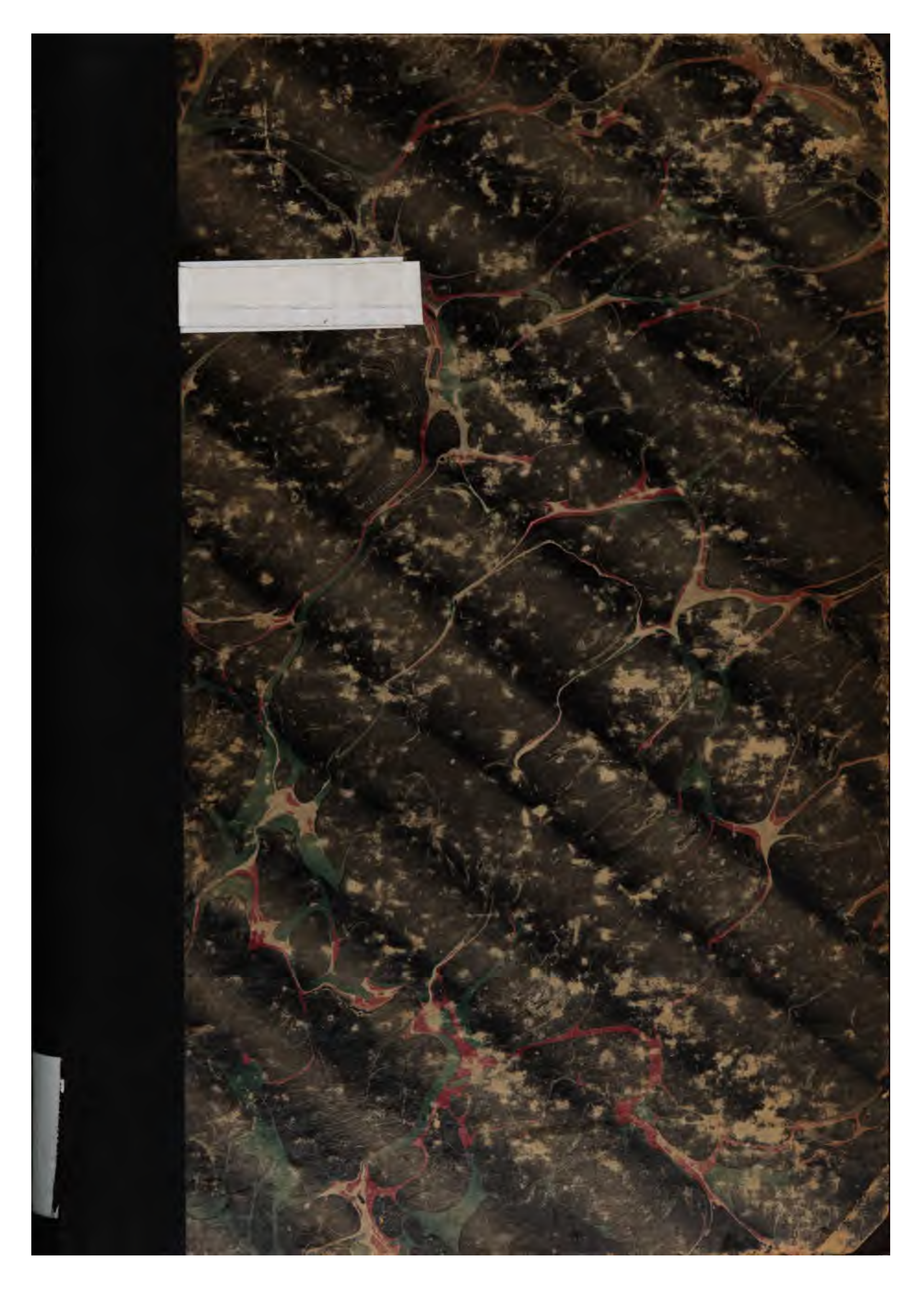


P.O.Somov

KINEMATICS OF THE CO-LINEARLY CHANGING SYSTEM OF A GENERAL TYPE

1891

Russian

КИНЕМАТИКА

КОЛЛИНЕАРНО-ИЗМѢНЯЕМОЙ

СИСТЕМЫ

ОБЩАГО ВИДА.

П. О. Сомова.



ВАРШАВА.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА.
Королевская улица № 13.

1891.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Варшавскаго Университета.

Ректоръ *И. Щелковъ.*

Оглавленіе.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.,	*строка,*	*напечатано,*	*должно стоять.*
V	32	это ускореніе разлагается	эти ускоренія разлагаются.
3	11	$A_{10} = 0$	$A_{10} = 1.$
39	3	служить	служитъ
64	9	слагаемыя	слагаемыя
102	15	векторъ z	векторъ r
—	17	$z = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$	$r = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$
—	19	векторовъ z	векторовъ r
105	15	скорости	скоростью
106	22	$k_1z + k_2x$	$k_1z + k_3x$
128	16	тетраэдра, на	тетраэдра, напр. на
—	21	M_4M_1, пополамъ	M_4M_1 пополамъ.
155	4	$(\varepsilon_1 - \varepsilon)xy;$	$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)xy;$
—	8	(xyz)	xyz
177	3	$= k_2k_3z + k_1k_2x$	$+ k_2k_3z + k_1k_2x$
—	4	$= k_3k_1x + k_3k_3y$	$+ k_3k_1x + k_2k_3y$
181	5	$+ E_1'x'$	$= E_1'x'$
206	6	$J_1 = s_1\sigma$	$J_1 = - s_1\sigma$
221	22	членъ въ знаменателѣ уравненія	членъ уравненія

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Между различными измѣняемыми системами существуютъ такія, кинематическія свойства которыхъ тѣсно связаны съ кинематическими свойствами твердаго тѣла и притомъ такимъ образомъ, что всѣ свойства движенія твердаго тѣла являются какъ частные случаи кинематическихъ свойствъ этихъ измѣняемыхъ системъ. Иныя изъ этихъ системъ имѣютъ важное практическое значеніе въ механикѣ, другія обращаютъ на себя вниманіе болѣе въ смыслѣ обобщенія. Въ обоихъ отношеніяхъ является интереснымъ обстоятельное изученіе такого измѣняемаго тѣла, свойства движенія котораго обнимали-бы собою въ самомъ общемъ видѣ кинематическія свойства всѣхъ этихъ системъ, включая сюда и твердое тѣло. Чтобы остановиться на такой общей системѣ и не заходить притомъ въ обобщеніяхъ слишкомъ далеко, нужно отыскать ту существенную особенность всѣхъ упомянутыхъ системъ, благодаря которой онѣ находятся въ родствѣ между собою, и эту особенность принять за основаніе при опредѣленіи системы самаго общаго вида. Наиболѣе характерною особенностью этихъ системъ, какъ съ геометрической такъ и съ аналитической стороны, является то обстоятельство, что всякая плоскость, составленная изъ точекъ измѣняемой системы, остается плоскостью во все время движенія. Отыскивая систему, движеніе которой ничѣмъ инымъ кромѣ этого свойства не было-бы ограничено, мы неизбѣжно приходимъ къ системѣ коллинеарно-измѣняемой, и должны принять ее за систему самаго общаго вида, въ которой сохраняются всѣ существенныя свойства движенія какъ твер-

даго тѣла такъ и однородно-измѣняемой, а въ частности, подобно-измѣняемой системы. При дальнѣйшемъ обобщеніи всѣ эти основныя кинематическія свойства уже значительно искажаются или теряются; поэтому наше вниманіе естественно должно остановиться на изученіи системы коллинеарно-измѣняемой. Кинематикой этой системы начали заниматься въ недавнее время, останавливаясь притомъ преимущественно на такихъ свойствахъ, которыя вытекаютъ изъ основныхъ началъ синтетической геометріи. Первою по времени статьею, въ которой было обращено вниманіе на коллинеарно-измѣняемую систему (впрочемъ только двухъ измѣреній), слѣдуетъ считать статью проф. Лигина: „Обобщенія нѣкоторыхъ геометрическихъ свойствъ движенія системъ", 1873 года[1]). Въ этой статьѣ указывается существованіе мгновенныхъ осей и центровъ коллинеарно-измѣняемой системы двухъ измѣреній. Burmester[2]) подробнѣе развилъ нѣкоторыя кинематическія свойства этой системы и болѣе опредѣленнымъ образомъ выяснилъ отличіе ея отъ системы однородно-измѣняемой, хотя имъ не указывается тотъ характерный элементъ деформаціи, которымъ коллинеарно-измѣняемая система общаго вида отличается отъ однородно-измѣняемой системы. Burmester разсматриваетъ систему нетолько плоскую но и трехъ измѣреній; выборъ вопросовъ обусловливается при этомъ по необходимости чисто геометрическими пріемами изслѣдованія и касается преимущественно частныхъ случаевъ движенія; поэтому многіе вопросы, интересные съ точки зрѣнія кинематики и главнымъ образомъ такіе, которые выражаютъ количественныя соотношенія между различными кинематическими элементами, остаются безъ вниманія.

До сихъ поръ, насколько мнѣ извѣстно, не существуетъ сколько-нибудь полнаго и систематическаго изложенія кинематики коллинеарно-измѣняемой системы *общаго вида;* въ то время какъ

---

[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques. T. XII и диссертація. Одесса.

[2]) Zeitschrift für Math. und Phys. B. XIX и XX, 1873 и 1874 г.

частный видъ ея—система однородно-измѣняемая—изученъ уже довольно хорошо, благодаря своему практическому значенію въ теоріи упругости и въ гидродинамикѣ. Настоящее изслѣдованіе представляетъ опытъ такого болѣе или менѣе всесторонняго и систематическаго изученія коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній общаго вида, т. е. рѣшенія относительно ея тѣхъ главнѣйшихъ вопросовъ, изъ которыхъ вообще слагается кинематика. Какъ первый опытъ этого рода, онъ конечно не лишенъ многихъ недостатковъ и пробѣловъ. Иные вопросы только затронуты, другіе совсѣмъ оставлены въ сторонѣ, чтобы не увеличивать и безъ того большаго объема работы. Мы старались обратить вниманіе на тѣ вопросы, которыми кинематика этой системы наиболѣе характеризуется, и дать рядъ формулъ, могущихъ служить для дальнѣйшаго изученія этой системы.

Нѣкоторые относящіеся сюда вопросы были мною уже напечатаны въ различныхъ изданіяхъ [1]); теперь они входятъ въ разныхъ отдѣлахъ настоящаго сочиненія отчасти въ пополненномъ видѣ и въ большей связи между собою.

Приведемъ главнѣйшіе изъ тѣхъ вопросовъ, на которые обращено вниманіе въ настоящемъ изслѣдованіи.

Въ первой главѣ разсматриваются элементы, опредѣляющіе конечное перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы, и дается рядъ формулъ, которыми приходится пользоваться въ дальнѣйшемъ. При этомъ опредѣляется геометрическое значеніе этихъ элементовъ введеніемъ въ разсмотрѣніе пяти точекъ системы, движеніемъ которыхъ вполнѣ опредѣляется движеніе всей системы. Пять тетраэдровъ, имѣющихъ вершинами послѣдовательно четыре изъ этихъ точекъ, даютъ возможность въ простомъ видѣ представить геометрическое значеніе коэффиціентовъ. Въ концѣ главы разсматривается такой частный случай движенія, когда четыре изъ заданныхъ точекъ неподвижны и слѣдовательно движеніе всѣхъ точекъ системы опредѣляется произвольно задан-

---

[1]) Сообщенія Харьковскаго Мат. Общ. 1886 г. Варшавскія Унив. Извѣстія 1889 г. Сообщенія VIII Съѣзда Естествоиспытателей 1890 г,

нымъ движеніемъ одной точки. Этотъ случай, названный Burmester'омъ однообразнымъ движеніемъ (einförmige Bewegung), имѣетъ важное отношеніе къ общему случаю движенія. Въ этой главѣ, параллельно съ общимъ случаемъ коллинеарно-измѣняемой системы, разсматриваются для сравненія нѣкоторыя системы болѣе общаго вида и съ другой стороны частные виды коллинеарно-измѣняемой системы: система однородно-измѣняемая, подобно-измѣняемая и неизмѣняемая.

Вторая глава посвящена разсмотрѣнію тѣхъ параметровъ, которыми опредѣляется деформація коллинеарно-измѣняемой системы. Имѣя въ виду, что однородно-измѣняемая система является частнымъ видомъ системы коллинеарно-измѣняемой, мы старались опредѣлить тотъ элементъ деформаціи, которымъ послѣдняя система отличается отъ первой. Это привело къ разсмотрѣнію особаго параметра деформаціи, названнаго нами раздвиганіемъ. Оказывается, что это раздвиганіе, если его надлежащимъ образомъ измѣрять и изображать графически, обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, какъ и многіе другіе кинематическіе элементы, а именно, можетъ быть разлагаемо по координатнымъ осямъ и вообще подчиняться закону геометрическаго сложенія. Этимъ элементомъ деформаціи и отличается коллинеарно-измѣняемая система общаго вида отъ указанныхъ выше частныхъ ея видовъ. Далѣе разсматривается составное перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы и отыскиваются наиболѣе интересные частные случаи этого составнаго движенія, именно такіе, въ которыхъ законы сложенія элементовъ движенія представляются въ наиболѣе простомъ видѣ. Наиболѣе интересными представляются намъ результаты, касающіеся сложенія двухъ чистыхъ раздвиганій. Раздвиганія съ общимъ центромъ слагаются, какъ сказано выше, по закону геометрическаго сложенія, а раздвиганія параллельныя слагаются какъ угловыя скорости около параллельныхъ осей. Кромѣ того при сложеніи перемѣщеній обращено вниманіе на вліяніе, которое оказываетъ порядокъ двухъ послѣдовательныхъ конечныхъ перемѣщеній на окончательное положеніе системы, и указываются тѣ случаи, когда вліяніе порядка перемѣщеній исчезаетъ.

Третья глава имѣетъ своимъ предметомъ изученіе скоростей и въ особенности распредѣленія скоростей въ системѣ. Характернымъ для коллинеарно-измѣняемой системы параметромъ скоростей является скорость раздвиганія, которая, какъ мы показываемъ, измѣряется геометрическою производною раздвиганія, разсмотрѣннаго въ предыдущей главѣ. Переходя потомъ къ изученію распредѣленія скоростей, мы исходимъ изъ розысканія такихъ плоскостей, которыя перемѣщаются въ безконечно-малый элементъ времени параллельно самимъ себѣ, и въ частности такихъ плоскостей, прямыхъ линій и точекъ системы, которыя сохраняютъ свое положеніе въ теченіе безконечно-малаго элемента времени. На существованіе ихъ имѣются указанія у Burmester'a (а для плоской системы еще раньше у Лигина), но зависимость ихъ отъ коэффиціентовъ въ уравненіяхъ движенія и вытекающіе отсюда законы, которымъ подчиняется распредѣленіе скоростей въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы, не были, насколько намъ извѣстно, раньше изучаемы. Въ виду этого мы считали нужнымъ посвятить этому вопросу значительную часть третьей главы. Притомъ-же эти вопросы, можетъ быть болѣе всѣхъ другихъ, служатъ для характеристики движенія системы. Въ концѣ этой главы разсматривается вопросъ о скоростяхъ въ составномъ движеніи, главнымъ образомъ для тѣхъ случаевъ, когда въ опредѣленіе скоростей входитъ скорость раздвиганія; при этомъ разсматривается то вліяніе, которое оказываетъ на скорости перенесеніе всѣхъ кинематическихъ центровъ въ одну общую точку; послѣ чего уже вопросъ о сложеніи скоростей является въ весьма простомъ видѣ. Въ заключеніе опредѣляются условія, при которыхъ сложеніе чистаго раздвиганія съ движеніемъ системы какъ однородно-измѣняемой даетъ опять чистое раздвиганіе.

Въ четвертой главѣ говорится объ ускореніяхъ въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы, и это ускореніе разлагается на простѣйшіе составные элементы. По отношенію къ тѣмъ элементамъ ускоренія, которые зависятъ отъ движенія системы какъ однородно-измѣняемой, указываются нѣкоторыя поправки, которыя, по нашему мнѣнію, нужно сдѣлать въ формулахъ

Durrande'a, изучавшаго ускореніе однородно-измѣняемой системы [1]).

Наконецъ пятая глава состоитъ изъ трехъ дополнительныхъ статей и занимается главнымъ образомъ вопросомъ о линіяхъ огибаемыхъ и въ особенности о такихъ линіяхъ, которыя при движеніи системы сами себя огибаютъ (линіи тока). По числу плоскостей, которыя при безконечно-маломъ перемѣщеніи коллинеарно-измѣняемой системы не измѣняютъ своего положенія, самоогибаемыя линіи въ этихъ плоскостяхъ раздѣляются на два различныхъ типа. Сообразно съ этимъ приводятся дифференціальныя уравненія этихъ кривыхъ и интегралы этихъ уравненій; послѣ чего изслѣдуется общій характеръ этихъ кривыхъ для двухъ указанныхъ случаевъ. Кромѣ того для этихъ двухъ случаевъ самоогибаемыя линіи вычерчены, конечно при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ параметровъ движенія. Относительно этихъ вопросовъ у Burmester'a [2]) имѣется только краткое указаніе или вѣрнѣе предположеніе, что въ случаѣ существованія на плоскости одного дѣйствительнаго центра скоростей самоогибаемыя линіи будутъ спиралями; но опредѣленія характера этихъ спиралей у него не дѣлается, безъ чего нельзя о нихъ составить себѣ представленія, и вообще изслѣдованія самоогибаемыхъ для различныхъ случаевъ общаго движенія коллинеарно-измѣняемой системы мы нигдѣ не встрѣчали. Двѣ другія статьи, входящія въ послѣднюю главу, играютъ въ изслѣдованіи коллинеарно-измѣняемой системы второстепенную роль. Въ первой изъ нихъ разсматривается распредѣленіе объемнаго расширенія для этой системы, а во второй статьѣ даются формулы, могущія служить для изученія деформаціи поверхности, принадлежащей коллинеарно-измѣняемой системѣ, и дѣлаются два маленькихъ приложенія этихъ формулъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ рѣшенію вопросовъ въ приложеніи къ коллинеарно-измѣняемой системѣ мы предпосылали общія раз-

---

[1]) Annales scientifiques de l'Ecole Normale, 2-me serie, 3.
[2]) Zeitschrift f. Math. und Phys. B. XX.

сужденія, приложимыя ко всякой измѣняемой системѣ. Главнымъ образомъ это сдѣлано по отношенію къ такимъ вопросамъ, которые или сравнительно рѣдко затрогиваются въ кинематикѣ, или, когда общія разсужденія могутъ помочь выясненію свойствъ коллинеарно-измѣняемой системы.

Имѣя въ виду постоянно общій случай движенія коллинеарно-измѣняемой системы, мы тѣмъ не менѣе считали нужнымъ, чтобы не нарушать цѣлости изложенія, привести нѣкоторые извѣстные уже результаты, касающіеся системы однородно-измѣняемой, такъ какъ элементы деформаціи этой системы входятъ въ составъ деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы общаго вида. Исключеніе этихъ вопросовъ сдѣлало-бы поневолѣ изложеніе болѣе отрывочнымъ.

Мы не приводимъ отдѣльно полнаго списка статей, относящихся къ настоящей работѣ, потому-что по кинематикѣ коллинеарно-измѣняемой системы общаго вида тѣ немногія работы, которыя существуютъ, указаны въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ сочиненія. Литература-же, касающаяся однородно-измѣняемой системы, довольно обширна, но имѣетъ лишь косвенное отношеніе къ нашему изслѣдованію. Притомъ-же эта литература была приведена мною въ „Кинематикѣ подобно-измѣняемой системы двухъ измѣреній"; поэтому теперь остается сообщить только *дополнительный списокъ работъ* отчасти тамъ пропущенныхъ, а отчасти появившихся въ самое послѣднее время. Вотъ эти работы, расположенныя въ хронологическомъ порядкѣ.

Вышнеградскій. О движеніи системы матеріальныхъ точекъ, опредѣляемой полными линейными дифференціальными уравненіями. Дисс. 1854 г.

Painvain. Note sur la transformation homographique. Nouv. Ann. (2) IX. 1870.

Amigues. Relation entre les volums correspondants de deux figures homographiques. Nouv. Ann. (2) XII. 1873.

Korteweg. Ueber einige Anwendungen der Affinität. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1876.

Mehmke. Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnungen ähnlich-veränderlicher Systeme. Civilingenieur. B. 29. 1883.

Artzt. Programm des Gymnasiums zu Recklingshausen. 1884 и 1886 г. (о подобно-изм. и др. системахъ).

Nicoli. Три статейки о частномъ случаѣ движенія подобно-измѣняемой системы. Ничего новаго въ себѣ не содержатъ. Modena Mem. 2 серія, т. I.

Neuberg. Proceedings of the London Math. Society. 1885 (частные случаи движенія подобно-изм. системы).

Formenti. Dinamica dei sistemi che si muovono conservandosi simili a sé stessi. Lomb. Rend. XIX. 1886.

Бобылевъ. Гидростатика и теорія упругости. 1886 г.

Ibbetson. Math. theory of elasticity. 1887 г.

Burmester. Kinematik. 3-й выпускъ. 1888 г.

Зейлигеръ. Механика подобно-измѣняемой системы, вып. 1-й. 1890 г.

28 Августа 1890 г.

ГЛАВА I.

Элементы, опредѣляющіе движеніе коллинеарно-измѣняемой системы и ея частныхъ видовъ.

I. Движеніе коллинеарно-измѣняемой системы самаго общаго вида опредѣляется единственнымъ условіемъ, чтобы всякая плоскость, составленная изъ точекъ этой системы, во все время движенія оставалась плоскостью.

Пусть будутъ въ прямолинейныхъ координатахъ

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1\ (a,\ b,\ c,\ t) \\ y = f_2\ (a,\ b,\ c,\ t) \\ z = f_3\ (a,\ b,\ c,\ t) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

уравненія, опредѣляющія координаты x, y, z какой-нибудь точки системы въ моментъ t по ея координатамъ въ нѣкоторый начальный моментъ, и

$$\left.\begin{array}{l} a = \varphi_1\ (x,\ y,\ z,\ t) \\ b = \varphi_2\ (x,\ y,\ z,\ t) \\ c = \varphi_3\ (x,\ y,\ z,\ t) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

уравненія, опредѣляющія обратно начальное положеніе точки по ея положенію въ моментъ t. Плоскость

$$Ka+Lb+Mc+N=0, \qquad (3)$$

проведенная въ системѣ въ ея начальномъ положеніи, обращается въ моментъ t въ слѣдующую поверхность:

$$K\,\varphi_1\,(x, y, z, t) + L\,\varphi_2\,(x, y, z, t) + M\,\varphi_3\,(x, y, z, t) + N = 0.$$

По опредѣленію, данному коллинеарно-измѣняемой системѣ, эта поверхность во всякое время должна оставаться плоскостью, и это должно

имѣть мѣсто, каковы-бы не были заданныя значенія коэффиціентовъ K, L, M и N. Это возможно только въ томъ случаѣ, если функціи φ_1, φ_2, φ_3 будутъ отношеніями трехъ линейныхъ функцій отъ координатъ къ одной и той-же четвертой тоже линейной функціи; т. е. мы должны принять:

$$(4)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{E_1\, x + F_1\, y + G_1\, z + H_1}{\lambda\, x + \mu\, y + \nu\, z + 1}, \\[2mm] b = \dfrac{E_2\, x + F_2\, y + G_2\, z + H_2}{\lambda\, x + \mu\, y + \nu\, z + 1}, \\[2mm] c = \dfrac{E_3\, x + F_3\, y + G_3\, z + H_3}{\lambda\, x + \mu\, y + \nu\, z + 1}. \end{cases}$$

Какъ извѣстно, въ этомъ случаѣ и обратно координаты x, y, z выражаются черезъ a, b, c функціями такого-же вида; т. е.

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{A_1\, a + B_2\, b + C_1\, c + D_1}{\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c + 1}, \\[2mm] y = \dfrac{A_2\, a + B_2\, b + C_2\, c + D_2}{\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c + 1}, \\[2mm] z = \dfrac{A_3\, a + B_3\, b + C_3\, c + D_3}{\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c + 1}. \end{cases}$$

Между коэффиціентами въ формулахъ (4) и (5) будутъ при этомъ существовать слѣдующія зависимости. Если означить опредѣлитель

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = \triangle ,$$

то

$$(7)\ \lambda = -\frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix},\ \mu = -\frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_3, & B_3, & C_3 \\ A_1, & B_1, & C_1 \end{vmatrix},\ \nu = -\frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix},$$

$$(8)\ E_1 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \beta, & \gamma, & 1 \\ B_2, & C_2, & D_2 \\ B_3, & C_3, & D_3 \end{vmatrix},\ E_2 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \gamma, & \alpha, & 1 \\ C_2, & A_2, & D_2 \\ C_3, & A_3, & D_3 \end{vmatrix},\ E_3 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & 1 \\ A_2, & B_2, & D_2 \\ A_3, & A_3, & D_3 \end{vmatrix},$$

$$(9)\ F_1 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \beta, & \gamma, & 1 \\ B_3, & C_3, & D_3 \\ B_1, & C_1, & D_1 \end{vmatrix},\ F_2 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \gamma, & \alpha, & 1 \\ C_3, & A_3, & D_3 \\ C_1, & A_1, & D_1 \end{vmatrix},\ F_3 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & 1 \\ A_3, & B_3, & D_3 \\ A_1, & B_1, & D_1 \end{vmatrix},$$

$$G_1 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \beta, & \gamma, & 1 \\ B_1, & C_1, & D_1 \\ B_2, & C_2, & D_2 \end{vmatrix}, \; G_2 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \gamma, & \alpha, & 1 \\ C_1, & A_1, & D_1 \\ C_2, & A_2, & D_2 \end{vmatrix}, \; G_3 = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & 1 \\ A_1, & B_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & D_2 \end{vmatrix}, \quad (10)$$

$$H_1 = -\frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} B_1, & C_1, & D_1 \\ B_2, & C_2, & D_2 \\ B_3, & C_3, & D_3 \end{vmatrix}, H_2 = -\frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} C_1, & A_1, & D_1 \\ C_2, & A_2, & D_2 \\ C_3, & A_3, & D_3 \end{vmatrix}, H_3 = -\frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & D_3 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Въ этихъ формулахъ коэффиціенты A_1, B_1, ... D_3, α, β, γ могутъ быть какими угодно непрерывными функціями времени, удовлетворяющими лишь условію, чтобы при

$$t = 0$$

выраженія, стоящія во вторыхъ частяхъ формулъ (5), обращались въ a, b, c, т. е., означая значкомъ 0 начальныя значенія коэффиціентовъ, мы должны имѣть

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 = 0, \; \beta_0 = 0, \; \gamma_0 = 0 \\ A_{10} = 0, \; B_{10} = 0, \; C_{10} = 0, \; D_{10} = 0 \\ A_{20} = 0, \; B_{20} = 1, \; C_{20} = 0, \; D_{20} = 0 \\ A_{30} = 0, \; B_{30} = 0, \; C_{30} = 1, \; D_{30} = 0 \end{array}\right\} \quad (12)$$

Замѣтимъ себѣ еще слѣдующія тожества, которыя будутъ намъ полезны въ дальнѣйшемъ и которыя получаются, если въ (5) вмѣсто a, b, c подставить ихъ выраженія изъ (4), или если въ (4) вмѣсто x, y, z подставить ихъ выраженія изъ (5):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 + \lambda = 0 \\ \alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3 + \mu = 0 \\ \alpha G_1 + \beta G_2 + \gamma G_3 + \nu = 0 \end{array}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1E_1 + B_1E_2 + C_1E_3 + D_1\lambda = \alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 + 1 \\ A_1F_1 + B_1F_2 + C_1F_3 + D_1\mu = 0 \\ A_1G_1 + B_1G_2 + C_1G_3 + D_1\nu = 0 \\ A_1H_1 + B_1H_2 + C_1H_3 + D_1 = 0 \end{array}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_2E_1 + B_2E_2 + C_2E_3 + D_2\lambda = 0 \\ A_2F_1 + B_2F_2 + C_2F_3 + D_2\mu = \alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 + 1 \\ A_2G_1 + B_2G_2 + C_2G_3 + D_2\nu = 0 \\ A_2H_1 + B_2H_2 + C_2H_3 + D_2 = 0 \end{array}\right\} \quad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_3E_1 + B_3E_2 + C_3E_3 + D_3\lambda = 0 \\ A_3F_1 + B_3F_2 + C_3F_3 + D_3\mu = 0 \\ A_3G_1 + B_3G_2 + C_3G_3 + D_3\nu = \alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 + 1 \\ A_3H_1 + B_3H_2 + C_3H_3 + D_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 + \alpha = 0 \\ \lambda B_1 + \mu B_2 + \nu B_3 + \beta = 0 \\ \lambda C_1 + \mu C_2 + \nu C_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} E_1A_1 + F_1A_2 + G_1A_3 + H_1\,\alpha = \lambda D_1 + \mu D_2 + \nu D_3 + 1 \\ E_1B_1 + F_1B_2 + G_1B_3 + H_1\,\beta = 0 \\ E_1C_1 + F_1C_2 + G_1C_3 + H_1\,\gamma = 0 \\ E_1D_1 + F_1D_2 + G_1D_3 + H_1 = 0 \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} E_2A_1 + F_2A_2 + G_2A_3 + H_2\,\alpha = 0 \\ E_2B_1 + F_2B_2 + G_2B_3 + H_2\beta = \lambda D_1 + \mu D_2 + \nu D_3 + 1 \\ E_2C_1 + F_2C_2 + G_2C_3 + H_2\gamma = 0 \\ E_2D_1 + F_2D_2 + G_2D_3 + H_2 = 0 \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} E_3A_1 + F_3A_2 + G_3A_3 + H_3\alpha = 0 \\ E_3B_1 + F_3B_2 + G_3B_3 + H_3\beta = 0 \\ E_3C_1 + F_3C_2 + G_3C_3 + H_3\gamma = \lambda D_1 + \mu D_2 + \nu D_3 + 1 \\ E_3D_1 + F_3D_2 + G_3D_3 + H_3 = 0 \end{cases}$$

Кромѣ того, складывая тѣ изъ уравненій (14), (15) и (16), вторыя части которыхъ не равны нулю, находимъ:

$$(21)\qquad \alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 = \lambda D_1 + \mu D_2 + \nu D_3$$

Изъ основнаго свойства коллинеарно-измѣняемой системы слѣдуетъ, что *всякая прямая линія,* составленная изъ ея точекъ, *остается во время движенія прямою,* потому-что точки такой прямой могутъ быть разсматриваемы какъ точки, лежащія во все время движенія на двухъ плоскостяхъ.

Алгебраическая поверхность не измѣняетъ своего порядка при движеніи системы. Такимъ образомъ напр. поверхность втораго порядка остается при всякомъ движеніи системы поверхностью втораго порядка. При этомъ впрочемъ видъ этой поверхности можетъ измѣниться, т. е. напр. эллипсоидъ можетъ превратиться въ гиперболоидъ или обратно; цилиндръ можетъ обратиться въ гиперболоидъ или въ конусъ и т. п.; потому-что коэффиціенты A_1 ,B_1 ... D_3, α, β, γ, которые будутъ входить въ уравненіе поверхности, могутъ быть какими угодно функціями времени.

Полагая въ формулахъ (5) для всѣхъ точекъ системы c равнымъ нулю и выражая условіе, чтобы во все время движенія для всѣхъ точекъ z было равно нулю, мы получимъ

$$x = \frac{A_1 a + B_1 b + D_1}{\alpha a + \beta b + 1}$$
$$y = \frac{A_2 a + B_2 b + D_2}{\alpha a + \beta b + 1}$$

уравненія движенія плоской коллинеарно-измѣняемой системы.

2. О коллинеаціи и примѣръ коллинеарно-измѣняемой системы.

Названіе „коллинеарно-измѣняемая система" происходитъ отъ слова „коллинеація" (Collineation), даннаго первоначально Möbius'омъ для двухъ соотвѣтствующихъ другъ-другу плоскихъ фигуръ, которыя удовлетворяютъ условію, чтобы тремъ точкамъ одной фигуры, расположеннымъ по прямой линіи, въ другой фигурѣ соотвѣтствовали три точки, тоже расположенныя по прямой линіи.

Съ понятіемъ о коллинеаціи связано также слѣдующее представленіе изъ проективной геометріи. Пусть будутъ M и N двѣ плоскости и S точка, не лежащая ни на одной изъ нихъ. Принимая эту точку за центръ проекцій и проектируя изъ нея какую-либо фигуру, начерченную въ плоскости M, на плоскость N, мы получимъ новую фигуру, которая и будетъ коллинеарною по отношенію къ первой. Точки этихъ двухъ фигуръ, лежащія на одной и той-же проектирующей прямой, называются *соотвѣтственными*, а самыя фигуры *коллинеарными* и *проективно-расположенными*. Въ разсматриваемой нами измѣняемой системѣ всякая плоская фигура остается постоянно коллинеарною самой себѣ, причемъ два положенія такой фигуры, вообще говоря, *не расположены проективно* другъ-къ-другу.

Чтобы показать, что уравненія движенія коллинеарно-измѣняемой системы удовлетворяютъ упомянутой проективной зависимости, означимъ координаты точекъ одной фигуры (M) черезъ a, b, c, а координаты соотвѣтственной точки коллинеарной ей и проективно-расположенной фигуры (N) черезъ x', y', z', наконецъ координаты центра проекцій S черезъ ξ, η, ζ. Тогда мы имѣемъ очевидно зависимости

$$\frac{x' - \xi}{a - \xi} = \frac{y' - \eta}{b - \eta} = \frac{z' - \zeta}{c - \zeta}.$$

Принимая во вниманіе уравненіе плоскости

$$Ex' + Fy' + Gz' + H = 0,$$

въ которой фигура (N) находится, и выражая x', y', z' черезъ a, b, c, мы получимъ формулы такого-же вида, какъ формулы (5). Означивъ черезъ x, y, z координаты точекъ фигуры (N), когда она не расположена проективно по отношенію къ фигурѣ (M), мы будемъ имѣть между этими координатами и координатами x', y', z' линейныя зависимости, такъ какъ эти зависимости будутъ не чѣмъ инымъ, какъ формулами преобразованія координатъ. Отсюда слѣдуетъ, что и координаты x, y, z будутъ съ координатами a, b, c связаны формулами такого-же вида, какой имѣютъ формулы (5).

Какъ примѣръ коллинеарно-измѣняемой системы, можно привести такую систему точекъ, въ которой эллипсоидъ

$$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} + \frac{c^2}{n^2} = 1 \tag{22}$$

при какихъ угодно значеніяхъ l, m, n, вытягиваясь по оси z, переходитъ въ параболоидъ, а потомъ въ однополый гиперболоидъ. Дѣйствительно, такой деформаціи можно удовлетворить формулами

$$x = \frac{a}{1-ktc}, \qquad y = \frac{b}{1-ktc}, \qquad z = \frac{c}{1-ktc},$$

гдѣ k постоянная величина. Опредѣляя отсюда a, b, c и подставляя ихъ въ уравненіе (22), мы получимъ слѣдующее уравненіе поверхности

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{m^2} + \left(\frac{1}{n^2} - k^2t^2\right) z^2 - 2ktz = 1.$$

Измѣняя t отъ O до ∞, мы будемъ сначала получать эллипсоиды; въ моментъ

$$t = \frac{1}{kn}$$

эллипсоидъ обратится въ параболоидъ, а при дальнѣйшемъ измѣненіи времени этотъ параболоидъ перейдетъ въ однополый гиперболоидъ. При этомъ всѣ точки, лежащія въ плоскости (xy), будутъ оставаться неподвижными; а точки, у которыхъ начальная координата

$$c = \frac{1}{kt},$$

въ соотвѣтственный моментъ будутъ находиться въ безконечности.

3. Обобщеніе коллинеарно-измѣняемой системы.

Коллинеарно-измѣняемая система представляетъ собою частный видъ системы, движеніе которой въ прямолинейныхъ координатахъ опредѣляется уравненіями:

$$x = \frac{A_1 a + B_1 b + C_1 c + D_1}{\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + 1},$$

$$y = \frac{A_2 a + B_2 b + C_2 c + D_2}{\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + 1}, \qquad (23)$$

$$z = \frac{A_3 a + B_3 b + C_3 c + D_3}{\alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + 1},$$

гдѣ a, b, c начальныя координаты а x, y, z координаты той-же точки въ моментъ t и $A_1, B_1, \ldots\ldots D_3, \alpha_1, \ldots \gamma_3$ какія-нибудь функціи времени.

Траекторіи точекъ въ движеніи этой системы могутъ быть весьма разнообразны, но движеніе и деформація системы характеризуются всегда слѣдующими двумя свойствами:

1) Зависимости (23) однозначныя; поэтому каждой точкѣ (a, b, c) соотвѣтствуетъ всегда только одна точка (x, y, z) и наоборотъ.

2) Точки, принадлежавшія первоначально плоскости, образуютъ во время движенія поверхность третьяго порядка, какъ это можно видѣть, исключивъ a, b, c изъ уравненій (23) и изъ уравненія плоскости (3).

Если взять подобную-же зависимость въ пространствѣ двухъ измѣреній, т. е.

$$x = \frac{A_1 a + B_1 b + D_1}{\alpha_1 a + \beta_1 b + 1},$$

$$z = \frac{A_2 a + B_2 b + D_2}{\alpha_2 a + \beta_2 b + 1}, \qquad (24)$$

то она опредѣлитъ собою такую плоскую измѣняемую систему, въ которой прямая линія превращается въ коническое сѣченіе, которое будетъ притомъ всегда гиперболой. Дѣйствительно, опредѣливъ изъ уравненій a и b:

$$a = \frac{(\beta_1 - \beta_2) xy + (B_2 - D_2\beta_1) x + (D_1\beta_2 - B_1) y + B_1 D_2 - D_1 B_2}{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) xy + (A_2\beta_1 - B_2\alpha_1) x + (B_1\alpha_2 - A_1\beta_2) y + A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

$$b=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)xy+(D_2\alpha_1-A_2)x+(A_1-D_1\alpha_2)y+D_1A_2-D_2A_1}{(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)xy+(A_2\beta_1-B_2\alpha_1)x+(B_1\alpha_2-A_1\beta_2)y+A_1B_2-A_2B_1},$$

и подставивъ въ уравненіе прямой

$$Ka+Lb+N=0,$$

получимъ уравненіе гиперболы. Такую систему можно поэтому назвать *гиперболически-измѣняемою* [1]).

Зависимости болѣе общаго вида,

$$(A_1a+B_1b+D_1)x+(A_2a+B_2b+D_2)y+(A_3a+B_3b+D_3)=0,$$
$$(E_1a+F_1b+G_1)x+(E_2a+F_2b+G_2)y+(E_3a+F_3b+G_3)=0,$$

могутъ дать, при соотвѣтственномъ подборѣ коэффиціентовъ, системы: *эллиптически-измѣняемую*, *параболически-измѣняемую*, а въ частности, *циклически-измѣняемую* [2]) (Kreisverwandtschaft).

Во всѣхъ этихъ системахъ теряется основное свойство, связывающее ихъ съ твердымъ тѣломъ и однородно-измѣняемою системою: неизмѣняемость плоскостей, проведенныхъ въ системѣ. Вмѣстѣ съ этимъ теряется значительная доля интереса къ изученію такихъ системъ. Мы будемъ поэтому въ дальнѣйшемъ ограничиваться изученіемъ системы коллинеарно-измѣняемой, кинематику которой можно разсматривать какъ наибольшее возможное обобщеніе кинематики твердаго тѣла и однородно-измѣняемой системы, при которомъ основныя кинематическія свойства этихъ тѣлъ еще сохраняются.

4. Частные виды коллинеарно-измѣняемой системы.

Коллинеарно-измѣняемая система обладаетъ свойствомъ, которое не можетъ быть присуще какому-либо дѣйствительному тѣлу въ природѣ, если размѣры и положенія этого тѣла не предполагать опредѣленнымъ образомъ ограниченными: а именно, нѣкоторыя ея точки, находившіяся въ начальный моментъ на конечномъ разстояніи отъ начала координатъ, удаляются въ конечный промежутокъ времени въ безконечность; и обратно, точки, находившіяся въ начальный моментъ на безконечности, могутъ въ теченіе конечнаго промежутка времени приблизиться на конечное

---

[1]) Зависимость между двумя системами точекъ, выражаемая уравненіями (24), была указана еще Möbius'омъ („Barycentrisches Calcul“) и потомъ Magnus'омъ (J. Crelle, 8) и приложена къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ геометріи.

[2]) Движеніе послѣдняго рода системы было отчасти изучено Burmester'омъ (Schlömilchs Zeitschrift f. Math. u. Ph. B 20).

разстояніе отъ начала координатъ. Это видно прямо изъ формулъ (5): всѣ точки, начальныя координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = 0,$$

причемъ α, β, γ суть тѣ значенія этихъ функцій, которыя соотвѣтствуютъ моменту t, — приходятъ въ этотъ моментъ въ безконечность. Точно такъ-же формулы (4) показываютъ, что точки, лежащія въ данный моментъ въ плоскости

$$\lambda x + \mu y + \nu z + 1 = 0,$$

находились въ начальный моментъ въ безконечности.

Для того, чтобы этого не могло случиться, необходимо, чтобы координаты a, b, c въ знаменателяхъ формулъ (5) не содержались; т. е. эти знаменатели должны быть постоянными величинами. Мы можемъ ихъ тогда считать равными единицѣ, т. е. разсматривать уравненія:

$$\begin{aligned} x &= A_1 a + B_1 b + C_1 c + D_1 \\ y &= A_2 a + B_2 b + C_2 c + D_2 \\ z &= A_3 a + B_3 b + C_3 c + D_3. \end{aligned} \tag{25}$$

Подобныя-же разсужденія могутъ быть отнесены и къ плоской коллинеарно-измѣняемой системѣ. Для нея получаются тогда формулы:

$$\begin{aligned} x &= A_1 a + B_1 b + D_1 \\ y &= A_2 a + B_2 b + D_2. \end{aligned} \tag{26}$$

Измѣняемая система, движеніе которой опредѣляется формулами (25) или (26), называется *однородно-измѣняемою* или *аффинно-измѣняемою* (affin-veränderlich). Мы будемъ для нея удерживать первое названіе [1]).

Существенное отличіе этого частнаго вида коллинеарно-измѣняемой системы отъ общаго состоитъ въ томъ, что въ этой системѣ нетолько всякая плоскость или прямая линія остаются плоскостью или прямою линіей во все время движенія, но кромѣ того всякія двѣ принадлежащія системѣ плоскости или прямыя линіи, бывшія въ начальный моментъ параллельными между собою, во все время движенія остаются параллельными, что впрочемъ не мѣшаетъ измѣняться ихъ общему направленію.

[1]) Проективная зависимость, называемая *Affinität*, есть тотъ частный случай коллинеаціи, когда центръ проекціи S удаляется въ безконечность.

Представимъ себѣ двѣ плоскости, принадлежащія коллинеарно-измѣняемой системѣ, въ ихъ начальномъ положеніи и пусть будутъ (3) и

$$Ka + Lb + Mc + N' = 0\,, \tag{27}$$

ихъ уравненія. Чтобы получить уравненія этихъ плоскостей въ моментъ t, мы должны исключить a, b, c изъ уравненій (5) и (3) или изъ уравненій (5) и (27). Для этого подставимъ a, b, c изъ уравненій (4) въ уравненія (3) и (27). Это дастъ уравненія

$$\begin{gathered}K(E_1x + F_1y + G_1z + H_1) + L(E_2x + F_2y + G_2z + H_2)\\ + M(E_3x + F_3y + G_3z + H_3) + N(\lambda x + \mu y + \nu z + 1) = 0\,,\\ K(E_1x + F_1y + G_1z + H_1) + L(E_2x + F_2y + G_2z + H_2)\\ + M(E_3x + F_3y + G_3z + H_3) + N'(\lambda x + \mu y + \nu z + 1) = 0\,.\end{gathered}$$

Угловые коэффиціенты этихъ плоскостей зависятъ отъ N и N' только въ томъ случаѣ, если λ, μ, ν не равны нулю. Если-же система однородно-измѣняемая, то α, β, γ равны нулю и слѣдовательно, по формулѣ (7), и λ, μ, ν равны нулю.

Изъ указаннаго свойства однородно-измѣняемой системы слѣдуетъ, что всякій параллелепипедъ, принадлежащій этой системѣ, во все время движенія будетъ оставаться параллелепипедомъ, параллелограммъ — параллелограммомъ и т. д.

Приведенное выше свойство алгебраическихъ поверхностей коллинеарно-измѣняемой системы,—что порядокъ поверхности не мѣняется,— будетъ имѣть мѣсто и въ приложеніи къ однородно-измѣняемой системѣ. Но при этомъ замкнутая поверхность не можетъ въ конечный промежутокъ времени распространиться въ безконечность или обратно; такъ-что напр. эллипсоидъ всегда останется эллипсоидомъ; точно такъ-же вслѣдствіе параллелизма цилиндръ останется цилиндромъ и т. д.

Замѣтимъ еще слѣдующее свойство однородно-измѣняемой системы, поясняющее ея названіе: во всѣхъ точкахъ прямой, произвольно проведенной въ системѣ. коэффиціентъ линейнаго удлиненія этой прямой одинъ и тотъ-же. Пусть будутъ

$$\begin{aligned}b &= ka + l\\ c &= ma + n\end{aligned}$$

уравненія прямой въ начальномъ положеніи системы и

$$\begin{aligned}&a_2 - a_1\\ b_2 - b_1 &= k(a_2 - a_1)\\ c_2 - c_1 &= m(a_2 - a_1)\end{aligned}$$

проекціи на координатныхъ осяхъ произвольно взятаго на ней отрѣзка. Послѣ перемѣщенія эти проекціи будутъ имѣть величины

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= A_1 (a_2 - a_1) + B_1 (b_2 - b_1) + C_1 (c_2 - c_1) \\ &= (A_1 + kB_1 + mC_1)(a_2 - a_1), \\ y_2 - y_1 &= (A_2 + kB_2 + mC_2)(a_2 - a_1), \\ z_2 - z_1 &= (A_3 + kB_3 + mC_3)(a_2 - a_1). \end{aligned}$$

Такимъ образомъ первоначальная длина отрѣзка

$$l_0 = \sqrt{1+k^2+m^2} \quad (a_2 - a_1)$$

обращается послѣ перемѣщенія въ

$$l = \sqrt{(A_1+kB_1+mC_1)^2+(A_2+kB_2+mC_2)^2+(A_3+kB_3+mC_3)^2} . (a_2-a_1)$$

$$= \frac{\sqrt{(A_1+kB_1+mC_1)^2+(A_2+kB_2+mC_2)^2+(A_3+kB_3+mC_3)^2}}{\sqrt{1+k^2+m^2}} . l_0 .$$

Откуда видно, что отношеніе $\frac{l}{l_0}$ не зависитъ отъ координатъ концовъ отрѣзка, слѣдовательно не зависитъ отъ его длины.

Примѣромъ однородно-измѣняемой системы можетъ служить такая система, въ которой эллипсоидъ, составленный изъ ея точекъ, во все время движенія остается эллипсоидомъ, конфокальнымъ съ первоначальнымъ, а всѣ точки его двигаются нормально къ его поверхности. Дѣйствительно, пусть будетъ (22) уравненіе эллипсоида въ начальный моментъ. По прошествіи времени t этотъ эллипсоидъ превратится, согласно первому изъ вышеприведенныхъ условій, въ слѣдующій:

$$\frac{x^2}{l^2+\lambda} + \frac{y^2}{m^2+\lambda} + \frac{z^2}{n^2+\lambda} = 1 , \tag{28}$$

причемъ λ можетъ быть какою-угодно функціею времени, удовлетворяющею условію, чтобы ни одинъ изъ знаменателей въ (28) не дѣлался отрицательнымъ. Второе условіе можетъ быть такъ выражено:

$$\frac{dx}{d\lambda} = k\frac{x}{l^2+\lambda}, \quad \frac{dy}{d\lambda} = k\frac{y}{m^2+\lambda}, \quad \frac{dz}{d\lambda} = k\frac{z}{n^2+\lambda} . \tag{29}$$

Для опредѣленія k, продифференцируемъ уравненіе (28) по λ:

$$2\left(\frac{x}{l^2+\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{y}{m^2+\lambda}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{z}{n^2+\lambda}\frac{dz}{d\lambda}\right)$$

$$-\left[\frac{x^2}{(l^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(m^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(n^2+\lambda)^2}\right] = 0 .$$

Подставляя сюда производныя координатъ изъ формулъ (29), находимъ

$$k=\tfrac{1}{2}\ ;$$

поэтому интегрированіе формулъ (29) даетъ:

$$x=H_1\sqrt{l^2+\lambda}\,,\quad y=H_2\sqrt{m^2+\lambda}\,,\quad z=H_3\sqrt{n^2+\lambda}\,.$$

Постоянныя интегрированія опредѣлятся изъ условія, что при $t=0$, т. е. при $\lambda=0$, x, y, z обращаются въ a, b, c. Такимъ образомъ

$$a=H_1 l\,,\quad b=H_2 m\,,\quad c=H_3 n$$

и поэтому окончательно

$$x=\frac{\sqrt{l^2+\lambda}}{l}.a\,,\qquad y=\frac{\sqrt{m^2+\lambda}}{m}.b,\qquad z=\frac{\sqrt{n^2+\lambda}}{n}.c.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что разсматриваемая система — однородно-измѣняемая.

Подобно-измѣняемая и неизмѣняемая системы. Измѣняемая система, въ которой всякая фигура, изъ ея точекъ составленная, остается подобною самой себѣ и которая поэтому можетъ быть названа *подобно-измѣняемою системою*, можетъ быть разсматриваема какъ частный случай коллинеарно-измѣняемой системы, такъ какъ въ ней очевидно всякая плоскость остается плоскостью во все время движенія. Подобно-измѣняемая система есть вмѣстѣ съ тѣмъ частный случай системы однородно-измѣняемой; потому-что при движеніи подобно-измѣняемой системы очевидно ни одна точка, находившаяся въ начальный моментъ на конечномъ разстояніи отъ начала координатъ, не можетъ въ конечный промежутокъ времени удалиться въ безконечность, если только при этомъ всѣ коэффиціенты въ числителяхъ формулъ (5) остаются конечными.

Посмотримъ, какимъ добавочнымъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты въ формулахъ (25) для того, чтобы эти формулы опредѣляли движеніе подобно-измѣняемой системы. Очевидно, мы удовлетворимъ условію подобія, если выразимъ условіе, что отношеніе разстоянія между двумя точками системы въ моментъ t къ разстоянію между этими точками въ начальный моментъ равно одной и той-же величинѣ, гдѣ-бы эти точки въ системѣ ни были взяты. Пусть будутъ a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 координаты двухъ точекъ системы въ начальный моментъ, x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты этихъ точекъ въ моментъ t и E отношеніе между разстояніями этихъ двухъ точекъ въ моментъ t и въ начальный моментъ. Тогда вышеуказанное условіе будетъ состоять въ слѣдующемъ:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=E^2[(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2]$$

или, если принять во вниманіе формулы (25),

$$\begin{aligned}&(A_1^2+A_2^2+A_3^2)(a_2-a_1)^2+(B_1^2+B_2^2+B_3^2)(b_2-b_1)^2\\ &+(C_1^2+C_2^2+C_3^2)(c_2-c_1)^2+2(B_1C_1+B_2C_2+B_3C_3)(b_2-b_1)(c_2-c_1)\\ &+2(C_1A_1+C_2A_2+C_3A_3)(c_2-c_1)(a_2-a_1)\\ &+2(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)(a_2-a_1)(b_2-b_1)\\ &=E^2[(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2].\end{aligned}$$

По предположенію эта зависимость должна имѣть мѣсто для всякихъ двухъ точекъ системы, т. е. при всякихъ значеніяхъ координатъ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2; это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если

$$\begin{aligned}&A_1^2+A_2^2+A_3^2=E^2,\\ &B_1^2+B_2^2+B_3^2=E^2,\\ &C_1^2+C_2^2+C_3^2=E^2,\end{aligned} \qquad (30)$$

$$\begin{aligned}&B_1C_1+B_2C_2+B_3C_3=0\\ &C_1A_1+C_2A_2+C_3A_3=0\\ &A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=0.\end{aligned} \qquad (31)$$

Легко видѣть, въ чемъ состоитъ геометрическій смыслъ этихъ условій. Какія-бы ни были значенія коэффиціентовъ A_1, B_1,.... C_3, если только они удовлетворяютъ уравненіямъ (30) и (31), мы всегда можемъ положить:

$$\begin{aligned}&A_1=E\cos\alpha_1, \quad B_1=E\cos\beta_1, \quad C_1=E\cos\gamma_1,\\ &A_2=E\cos\alpha_2, \quad B_2=E\cos\beta_2, \quad C_2=E\cos\gamma_2,\\ &A_3=E\cos\alpha_3, \quad B_3=E\cos\beta_3, \quad C_3=E\cos\gamma_3.\end{aligned} \qquad (32)$$

Слѣдовательно, мы можемъ принять, что $(A_1\ B_1\ C_1)$, $(A_2\ B_2\ C_2)$ и $(A_3\ B_3\ C_3)$ суть проекціи трехъ линій одинаковой длины E на осяхъ координатъ. Формулы (31) выражаютъ тогда очевидно условіе, что эти три линіи взаимно перпендикулярны. Назовемъ ихъ направленія черезъ X, Y, Z и предположимъ, что онѣ проведены изъ той точки системы, которая совпадаетъ въ начальный моментъ съ началомъ координатъ. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ самыя линіи X, Y, Z будутъ въ начальный моментъ совпадать съ осями координатъ; потому-что на основаніи формулъ (12) и принимая во вниманіе, что при $t=0$ будетъ $E=1$, мы должны имѣть для начальнаго момента:

$$\cos\alpha_1 = 1,\ \cos\beta_1 = 0,\ \cos\gamma_1 = 0,$$
$$\cos\alpha_2 = 0,\ \cos\beta_2 = 1,\ \cos\gamma_2 = 0,$$
$$\cos\alpha_3 = 0,\ \cos\beta_3 = 0,\ \cos\gamma_3 = 1.$$

Прямыя X, Y, Z могутъ быть такимъ образомъ разсматриваемы, какъ подвижныя координатныя оси, совпадающія въ начальный моментъ съ неподвижными осями. Уравненія движенія подобно-измѣняемой системы, которыя могутъ быть такъ написаны:

$$\begin{aligned} x &= D_1 + E\,(a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1), \\ y &= D_2 + E\,(a\cos\alpha_2 + b\cos\beta_2 + c\cos\gamma_2), \\ z &= D_3 + E\,(a\cos\alpha_3 + b\cos\beta_3 + c\cos\gamma_3), \end{aligned} \tag{33}$$

отличаются такимъ образомъ отъ формулъ преобразованія прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ лишь тѣмъ, что всѣ координаты относительно подвижныхъ осей координатъ содержатъ общій множитель E, который опредѣляетъ полученное системою въ промежутокъ времени отъ 0 до t линейное расширеніе. D_1, D_2, D_3 суть координаты точки, совпадавшей въ начальный моментъ съ началомъ неподвижныхъ осей.

Неизмѣняемая система можетъ быть разсматриваема также какъ частный случай системъ коллинеарно-измѣняемой и однородно-измѣняемой. Мы получимъ ея уравненія движенія, если въ формулахъ (32) положимъ $E = 1$; эти уравненія будутъ:

$$\begin{aligned} x &= D_1 + a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1, \\ y &= D_2 + a\cos\alpha_2 + b\cos\beta_2 + c\cos\gamma_2, \\ z &= D_3 + a\cos\alpha_3 + b\cos\beta_3 + c\cos\gamma_3, \end{aligned}$$

т. е. извѣстныя формулы преобразованія прямоугольныхъ координатъ.

5. О числѣ точекъ, опредѣляющихъ движеніе какой-нибудь измѣняемой системы.

Когда извѣстенъ законъ деформаціи измѣняемой системы, то, вообще говоря, достаточно бываетъ знать движеніе конечнаго числа точекъ системы для опредѣленія движенія всѣхъ остальныхъ ея точекъ. Вопросъ о числѣ точекъ, необходимыхъ и достаточныхъ для опредѣленія движенія всей системы, весьма важный, такъ какъ онъ находится въ тѣсной связи съ вопросомъ о числѣ какихъ-бы то ни было элементовъ, необходимыхъ и достаточныхъ для опредѣленія движенія системы. Пусть будетъ m число параметровъ,—функцій времени,—отъ которыхъ зависитъ движеніе

измѣняемой системы. Если движеніе опредѣляется по движенію нѣкотораго числа ея точекъ, то, вообще говоря, должно быть задано m координатъ въ функціи времени, и эти координаты должны быть выбраны такъ, чтобы опредѣленіе всѣхъ параметровъ при этомъ было возможно. Число координатъ можетъ быть выбрано равнымъ m только въ томъ случаѣ, если между точками, опредѣляемыми этими координатами, не существуетъ уже заранѣе заданныхъ условій, зависящихъ отъ закона деформаціи системы. Вообще говоря, такія условія будутъ существовать (какъ напр. для твердаго тѣла условія, чтобы разстоянія между точками были постоянны). Тогда число точекъ, n, должно быть взято такое, чтобы это число, умноженное на 3 и уменьшенное на число условій k между этими координатами, было равно числу параметровъ:

$$3n - k = m\,.$$

Знакъ неравенства $>$ здѣсь не можетъ имѣть мѣста, и число k всегда будетъ таково, что $m + k$ дѣлится на 3. Предположивъ противное, мы должны были-бы вывести заключеніе, что недостаточно взять число точекъ n равнымъ цѣлому при дѣленіи $m + k$ на 3, и что $n + 1$ точекъ даютъ слишкомъ много параметровъ для опредѣленія движенія; это значило-бы, что между координатами $n + 1$ точекъ нужно ввести еще добавочныя условія. Такія условія мы всегда можемъ считать уже съ самаго начала заключающимися въ числѣ k условій и потому можемъ предполагать, что $m + k$ дѣлится на три.

6. О числѣ точекъ, опредѣляющихъ движеніе коллинеарно-измѣняемой системы.

Обращаясь къ формуламъ (5), мы видимъ, что онѣ содержатъ 15 коэффиціентовъ, которые должны быть извѣстны въ функціи времени для того, чтобы можно было опредѣлить движеніе какой-либо точки системы. Отсюда слѣдуетъ, что необходимо знать 15 координатъ. Такимъ образомъ является вопросъ, могутъ-ли координаты *пяти* точекъ служить пятнадцатью элементами, опредѣляющими движеніе коллинеарно-измѣняемой системы, или число задаваемыхъ точекъ должно быть больше пяти и эти точки должны быть связаны какими-либо условіями. Для рѣшенія этого вопроса посмотримъ, можно-ли, когда заданы 15 координатъ

$$x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_5, y_5, z_5$$

пяти точекъ, опредѣлить 15 коэффиціентовъ въ формулахъ (5). Задача сводится къ рѣшенію слѣдующихъ 15 линейныхъ уравненій:

$$(34)\qquad A_1a_k + B_1b_k + C_1c_k + D_1 = x_k(\alpha a_k + \beta b_k + \gamma c_k + 1),$$
$$(35)\qquad A_2a_k + B_2b_k + C_2c_k + D_2 = y_k(\alpha a_k + \beta b_k + \gamma c_k + 1),$$
$$(36)\qquad A_3a_k + B_3b_k + C_3c_k + D_3 = z_k(\alpha a_k + \beta b_k + \gamma c_k + 1),$$

гдѣ значекъ k нужно послѣдовательно положить равнымъ 1, 2, 3, 4, 5. Составимъ сначала уравненія для опредѣленія коэффиціентовъ α, β, γ; для этого изъ 5 уравненій (34) исключимъ A_1, B_1, C_1, D_1, изъ уравненій (35) исключимъ A_2, B_2, C_2, D_2 и изъ уравненій (36) исключимъ A_3, B_3, C_3, D_3. Если положить

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_2, & b_2, & c_2, & 1 \\ a_3, & b_3, & c_3, & 1 \\ a_4, & b_4, & c_4, & 1 \\ a_5, & b_5, & c_5, & 1 \end{vmatrix} = S_1 \\ \begin{vmatrix} a_3, & b_3, & c_3, & 1 \\ a_4, & b_4, & c_4, & 1 \\ a_5, & b_5, & c_5, & 1 \\ a_1, & b_1. & c_1, & 1 \end{vmatrix} = S_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & 1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & 1 \\ a_3, & b_3, & c_3, & 1 \\ a_4, & b_4, & c_4, & 1 \end{vmatrix} = S_5 \end{array}\right.$$

$$(38)\qquad \alpha a_k + \beta b_k + \gamma c_k + 1 = Q_k,$$

то уравненія для опредѣленія α, β, γ представятся въ такомъ видѣ:

$$\begin{gathered} \Sigma x_k\, Q_k\, S_k = 0 \\ \Sigma y_k\, Q_k\, S_k = 0 \\ \Sigma z_k\, Q_k\, S_k = 0 \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} \alpha\Sigma a_k\, x_k\, S_k + \beta\Sigma b_k\, x_k\, S_k + \gamma\Sigma c_k\, x_k\, S_k + \Sigma x_k\, S_k = 0, \\ \alpha\Sigma a_k\, y_k\, S_k + \beta\Sigma b_k\, y_k\, S_k + \gamma\Sigma c_k\, y_k\, S_k + \Sigma y_k\, S_k = 0, \\ \alpha\Sigma a_k\, z_k\, S_k + \beta\Sigma b_k\, z_k\, S_k + \gamma\Sigma c_k\, z_k\, S_k + \Sigma z_k\, S_k = 0. \end{gathered}$$

Отсюда, полагая

$$(39)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma a_k\, x_k\, S_k, & \Sigma b_k\, x_k\, S_k & \Sigma c_k\, x_k\, S_k \\ \Sigma a_k\, y_k\, S_k, & \Sigma b_k\, y_k\, S_k, & \Sigma c_k\, y_k\, S_k \\ \Sigma a_k\, z_k\, S_k, & \Sigma b_k\, z_k\, S_k, & \Sigma c_k\, z_k\, S_k \end{vmatrix} = P$$

находимъ:

$$\alpha = -\frac{1}{P}\begin{vmatrix} \Sigma x_k\ S_k, & \Sigma b_k\ x_k\ S_k, & \Sigma c_k\ x_k\ S_k \\ \Sigma y_k\ S_k, & \Sigma b_k\ y_k\ S_k, & \Sigma c_k\ y_k\ S_k \\ \Sigma z_k\ S_k, & \Sigma b_k\ z_k\ S_k, & \Sigma c_k\ z_k\ S_k \end{vmatrix},$$

$$\beta = -\frac{1}{P}\begin{vmatrix} \Sigma a_k\ x_k\ S_k, & \Sigma x_k\ S_k, & \Sigma c_k\ x_k\ S_k \\ \Sigma a_k\ y_k\ S_k, & \Sigma y_k\ S_k, & \Sigma c_k\ y_k\ S_k \\ \Sigma a_k\ z_k\ S_k, & \Sigma z_k\ S_k, & \Sigma c_k\ z_k\ S_k \end{vmatrix}, \qquad (40)$$

$$\gamma = -\frac{1}{P}\begin{vmatrix} \Sigma a_k\ x_k\ S_k, & \Sigma b_k\ x_k\ S_k, & \Sigma x_k\ S_k \\ \Sigma a_k\ y_k\ S_k, & \Sigma b_k\ y_k\ S_k, & \Sigma y_k\ S_k \\ \Sigma a_k\ z_k\ S_k, & \Sigma b_k\ z_k\ S_k, & \Sigma z_k\ S_k \end{vmatrix}.$$

Послѣ этого для каждаго изъ 12 остальныхъ коэффиціентовъ получится по пяти тожественныхъ между собою выраженій. Такъ напр. для A_1, смотря по тому, которыя четыре изъ пяти уравненій (34) будемъ рѣшать, находимъ:

$$A_1 = \frac{1}{S_1}\left(x_2 Q_2 \frac{\partial S_1}{\partial a_2} + x_3 Q_3 \frac{\partial S_1}{\partial a_3} + x_4 Q_4 \frac{\partial S_1}{\partial a_4} + x_5 Q_5 \frac{\partial S_1}{\partial a_5}\right)$$

$$= \frac{1}{S_2}\left(x_3 Q_3 \frac{\partial S_2}{\partial a_3} + x_4 Q_4 \frac{\partial S_2}{\partial a_4} + x_5 Q_5 \frac{\partial S_2}{\partial a_5} + x_1 Q_1 \frac{\partial S_2}{\partial a_1}\right)$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{S_5}\left(x_1 Q_1 \frac{\partial S_5}{\partial a_1} + x_2 Q_2 \frac{\partial S_5}{\partial a_2} + x_3 Q_3 \frac{\partial S_5}{\partial a_3} + x_4 Q_4 \frac{\partial S_5}{\partial a_4}\right). \qquad (41)$$

Такимъ образомъ 15 линейныхъ уравненій (34), (35) и (36) могутъ быть, вообще говоря, рѣшены. Рѣшеніе дѣлается невозможнымъ, если двѣ изъ величинъ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, а слѣдовательпо и всѣ онѣ равны нулю, т. е. если 5 точекъ лежатъ въ начальный моментъ, а поэтому и во все время движенія, въ одной плоскости.

Легко видѣть, что движеніе плоской коллинеарно-измѣняемой системы можетъ быть задано движеніемъ четырехъ ея точекъ, изъ которыхъ три не должны лежать на одной прямой. Это видно изъ формулъ (24), которыя содержатъ 8 коэффиціентовъ.

7. Геометрическое значеніе коэффиціентовъ въ уравненіяхъ движенія коллинеарно-измѣняемой системы.

Разсматриваніе пяти точекъ коллинеарно-измѣняемой системы даетъ

возможность представить въ довольно простомъ видѣ геометрическое значеніе коэффиціентовъ ея уравненій. Чтобы это сдѣлать, выберемъ начальныя положенія пяти точекъ слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{ll}
 & (M_{10})\ a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ c_1 = 0, \\
 & (M_{20})\ a_2 = 0,\ b_2 = 1,\ c_2 = 0, \\
(42) & (M_{30})\ a_3 = 0,\ b_3 = 0,\ c_3 = 1, \\
 & (M_{40})\ a_4 = 0,\ b_4 = 0,\ c_4 = 0, \\
 & (M_{50})\ a_5 = 1,\ b_5 = 1,\ c_5 = 1.
\end{array}
$$

Эти точки образуютъ въ начальный моментъ такой объемъ, который можно разсматривать состоящимъ изъ трехъ равныхъ тетраэдровъ съ общимъ ребромъ $M_{40}\ M_{50}$, съ вершиною въ M_{50} и съ основаніями въ координатныхъ плоскостяхъ. Объемы этихъ тетраэдровъ мы означимъ такъ:

$$M_{20}M_{30}M_{40}M_{50} = \tfrac{1}{6}V_{10},\ M_{30}M_{40}M_{50}M_{10} = \tfrac{1}{6}V_{20},\ M_{40}M_{50}M_{10}M_{20} = \tfrac{1}{6}V_{30}.$$

Тотъ-же самый объемъ можно разсматривать состоящимъ изъ двухъ тетраэдровъ, сложенныхъ основаніями и имѣющихъ вершины въ M_{50} и M_{40}. Эти тетраэдры

$$M_{50}M_{10}M_{20}M_{30} = \tfrac{1}{6}V_{40},\ M_{10}M_{20}M_{30}M_{40} = \tfrac{1}{6}V_{50}$$

не симметричны и объемъ V_{40} вдвое больше объема V_{50}.

Формулы (37) даютъ теперь

$$S_1 = -1,\ S_2 = -1,\ S_3 = -1$$
$$S_4 = 2,\ S_5 = 1,$$

или, принимая во вниманіе выраженія для объема тетраэдровъ,

$$S_1 = -V_{10},\ S_2 = -V_{20},\ S_3 = -V_{30}$$
$$S_4 = V_{40}\ ,\ S_5 = V_{50}.$$

Опредѣляя суммы, входящія въ выраженіе (39), для P получимъ теперь:

$$P = \begin{vmatrix} x_5 - x_1, & x_5 - x_2, & x_5 - x_3 \\ y_5 - y_1, & y_5 - y_2, & y_5 - y_3 \\ z_5 - z_1, & z_5 - z_2, & z_5 - z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = V_4.$$

Для опредѣленія кеэффиціентовъ α, β, γ замѣтимъ, что теперь

$$\Sigma x_k S_k = -x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5$$
$$= (x_5 - x_1) + (x_5 - x_2) + (x_5 - x_3) - 2(x_5 - x_4).$$

Вслѣдствіе этого первый изъ опредѣлителей, стоящихъ въ формулахъ (40), обратится въ слѣдующій:

$$\begin{vmatrix} [(x_5-x_1)+(x_5-x_2)+(x_5-x_3)-2(x_5-x_4)], & (x_5-x_2), & (x_5-x_3) \\ [(y_5-y_1)+y_5-y_2)+(y_5-y_3)-2(y_5-y_4)], & (y_5-y_2), & (y_5-y_3) \\ [(z_5-z_1)+(z_5-z_2)+(z_5-z_3)-2(z_5-z_4)], & (z_5-z_2), & (z_5-z_3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_5 - x_1, & x_5 - x_2, & x_5 - x_3 \\ y_5 - y_1, & y_5 - y_2, & y_5 - y_3 \\ z_5 - z_1, & z_5 - z_2, & z_5 - z_3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} x_5 - x_4, & x_5 - x_2, & x_5 - x_3 \\ y_5 - y_4, & y_5 - y_2, & y_5 - y_3 \\ z_5 - z_4, & z_5 - z_2, & z_5 - z_3 \end{vmatrix}$$
$$= V_4 - 2\,V_1.$$

Поэтому по формуламъ (40)

$$\alpha = \frac{2V_1 - V_4}{V_4}, \quad \beta = \frac{2V_2 - V_4}{V_4}, \quad \gamma = \frac{2V_3 - V_4}{V_4}. \tag{43}$$

Эти величины, какъ и слѣдовало ожидать, обращаются въ 0 для начальнаго момента, такъ-какъ

$$V_{40} = 2V_{10} = 2V_{20} = 2V_{30}.$$

Для опредѣленія геометрическаго значенія остальныхъ коэффиціентовъ замѣтимъ, что теперь по формуламъ (38) и (43)

$$Q_1 = \frac{2V_1}{V_4}, \; Q_2 = \frac{2V_2}{V_4}, \; Q_3 = \frac{2V_3}{V_4}$$

$$Q_4 = 1, \; Q_5 = 2\frac{V_1 + V_2 + V_3 - V_4}{V_4}.$$

Подставляя эти выраженія во вторыя части уравненій (33), (35) и (36), мы найдемъ:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2V_1}{V_4} x_1 - x_4, & A_2 &= \frac{2V_1}{V_4} y_1 - y_4, & A_3 &= \frac{2V_1}{V_4} z_1 - z_4, \\ B_1 &= \frac{2V_2}{V_4} x_2 - x_4, & B_2 &= \frac{2V_2}{V_4} y_2 - y_4, & B_3 &= \frac{2V_2}{V_4} z_2 - z_4, \\ C_1 &= \frac{2V_3}{V_4} x_3 - x_4, & C_2 &= \frac{2V_3}{V_4} y_3 - y_4, & C_3 &= \frac{2V_3}{V_4} z_3 - z_4, \\ D_1 &= x_4, & D_2 &= y_4, & D_3 &= z_4. \end{aligned} \tag{44}$$

Уравненія движенія коллинеарно-измѣняемой системы, выраженныя черезъ координаты пяти ея точекъ, имѣютъ такимъ образомъ слѣдующій видъ:

$$x=\frac{(2_1V_1x_1-V_4x_4)a+(2V_2x_2-V_4x_4)b+(2V_3x_3-V_4x_4)c+V_4x_4}{(2V_1-V_4)a+(2V_2-V_4)b+(2V_3-V_4)\,c+V_4},$$

$$(45)\quad y=\frac{(2V_1y_1-V_4y_4)a+(2V_2y_2-V_4y_4)b+(2V_3y_3-V_4y_4)c+V_4y_4}{(2V_1-V_4)a+(2V_2-V_4)b+(2V_3-V_4)c+V_4},$$

$$z=\frac{(2V_1z_1-V_4z_4)a+(2V_2z_2-V_4z_4)b+(2V_3z_3-V_4z_4)c+V_4z_4}{(2V_1-V_4)a+(2V_2-V_4)b+(2V_3-V_4)c+V_4}.$$

8. Точки, опредѣляющія движеніе однородно-измѣняемой системы.

Уравненія (25) содержатъ 12 коэффиціентовъ; поэтому движеніе этой системы будетъ вполнѣ извѣстно, если будутъ даны 12 координатъ въ функціи времени. Эти координаты могутъ принадлежать *четыремъ точкамъ*. Пусть будутъ

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ y_4,\ z_4$$

координаты этихъ четырехъ точекъ. Тогда, полагая

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & 1\\ a_2, & b_2, & c_2, & 1\\ a_3, & b_3, & c_3, & 1\\ a_4, & b_4, & c_4, & 1 \end{vmatrix}=S,$$

найдемъ

$$A_1=\frac{1}{S}\begin{vmatrix} x_1, & b_1, & c_1, & 1\\ x_2, & b_2, & c_2, & 1\\ x_3, & b_3, & c_3, & 1\\ x_4, & b_4, & c_4, & 1 \end{vmatrix},$$

$$B_1=\frac{1}{S}\begin{vmatrix} a_1, & x_1, & c_1, & 1\\ a_2, & x_2, & c_2, & 1\\ a_3, & x_3, & c_3, & 1\\ a_4, & x_4, & c_4, & 1 \end{vmatrix},$$

и т. д.

и уравненія (25) выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x = \frac{1}{S} \begin{vmatrix} a, & b, & c, & 1, & 0 \\ a_1, & b_1, & c_1, & 1, & -x_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & 1, & -x_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & 1, & -x_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & 1, & -x_4 \end{vmatrix} \tag{46}$$

и т. д.

Эти формулы показываютъ, что *координаты всякой точки однородно-измѣняемой системы выражаются линейнымъ образомъ черезъ соотвѣтственныя координаты четырехъ данныхъ точекъ.* Эти четыре точки должны быть заданы не лежащими въ одной плоскости.

Движеніе плоской однородно-измѣняемой системы опредѣляется движеніемъ трехъ ея произвольно-заданныхъ точекъ, какъ показываютъ формулы (26), содержащія 6 коэффиціентовъ. Эти точки должны быть заданы не лежащими на одной прямой линіи.

Задавъ движеніе 4 точекъ однородно-измѣняемой системы трехъ измѣреній, можно дать простое геометрическое опредѣленіе коэффиціентамъ въ формулахъ (25). Для этого опредѣлимъ, во что обратятся въ моментъ t координаты слѣдующихъ четырехъ точекъ: точекъ M_1, M_2 и M_3, лежавшихъ въ начальный моментъ на осяхъ координатъ въ разстояніяхъ, равныхъ единицѣ отъ начала координатъ, и точки M_4, находившейся въ начальный моментъ въ началѣ координатъ. Подставляя въ формулы (25) послѣдовательно координаты точекъ M_{10}, M_{20}, M_{30}, M_{40} (42), найдемъ:

$$\begin{array}{lll} A_1 = x_1 - x_4, & A_2 = y_1 - y_4, & A_3 = z_1 - z_4, \\ B_1 = x_2 - x_4, & B_2 = y_2 - y_4, & B_3 = z_2 - z_4, \\ C_1 = x_3 - x_4, & C_2 = y_3 - y_4, & C_3 = z_3 - z_4, \\ D_1 = x_4, & D_2 = y_4, & D_3 = z_4. \end{array} \tag{47}$$

Итакъ, въ формулахъ (25) *члены, не зависящіе отъ координатъ, можно разсматривать какъ координаты точки, находившейся въ начальный моментъ въ началѣ координатъ, а остальные коэффиціенты какъ проекціи трехъ линій, равнявшихся въ начальный моментъ единицѣ и бывшихъ параллельными осямъ координатъ.*

Уравненія движенія однородно-измѣняемой системы могутъ быть теперь представлены слѣдующимъ образомъ:

$$(48)\quad \begin{aligned} x &= (x_1 - x_4)a + (x_2 - x_4)b + (x_3 - x_4)c + x_4, \\ y &= (y_1 - y_4)a + (y_2 - y_4)b + (y_3 - y_4)c + y_4, \\ z &= (z_1 - z_4)a + (z_2 - z_4)b + (z_3 - z_4)c + z_4. \end{aligned}$$

9. Точки, опредѣляющія движеніе подобно-измѣняемой системы.

Уравненія (33) содержатъ *семь* различныхъ между собою параметровъ, такъ какъ между девятью косинусами существуетъ шесть зависимостей; поэтому для опредѣленія движенія подобно-измѣняемой системы трехъ измѣреній необходимо знать движеніе по крайней мѣрѣ трехъ точекъ, координаты которыхъ должны быть тогда связаны двумя уравненіями. Эти уравненія мы можемъ составить, написавъ условіе, что треугольникъ, составленный изъ трехъ данныхъ точекъ, во все время движенія остается подобнымъ самому себѣ. Для этого выразимъ условіе, что отношенія между сторонами треугольника остаются постоянными:

$$(49)\quad \begin{aligned} &\frac{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2+(c_2-c_3)^2} = \frac{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2+(c_3-c_1)^2} \\ &= \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}. \end{aligned}$$

Когда даны три точки, связанныя такими условіями, то опредѣленіе коэффиціентовъ въ формулахъ (33) можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ. Изъ опредѣленія, даннаго величинѣ E, имѣемъ:

$$E = \frac{\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}}{\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2+(c_2-c_3)^2}}$$

и еще два подобныхъ-же выраженія на основаніи зависимостей (49). Далѣе по первой изъ формулъ (33), подставивъ туда координаты данныхъ точекъ, находимъ:

$$\begin{aligned} x_1 - D_1 &= E\cos\alpha_1 \cdot a_1 + E\cos\beta_1 \cdot b_1 + E\cos\gamma_1 \cdot c_1, \\ x_2 - D_1 &= E\cos\alpha_1 \cdot a_2 + E\cos\beta_1 \cdot b_2 + E\cos\gamma_1 \cdot c_2, \\ x_3 - D_1 &= E\cos\alpha_1 \cdot a_3 + E\cos\beta_1 \cdot b_3 + E\cos\gamma_1 \cdot c_3. \end{aligned}$$

Опредѣливъ отсюда $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ въ функціи извѣстныхъ уже величинъ и D_1 и подставивъ найденныя выраженія въ условіе:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,$$

мы получимъ квадратное уравненіе для опредѣленія D_1. Изъ двухъ рѣшеній этого уравненія мы должны будемъ выбрать то, которое удовлетворяетъ начальнымъ условіямъ, т. е. которое обращается въ нуль при $t = 0$. Составивъ въ дѣйствительности это квадратное уравненіе, мы увидимъ что корни его всегда будутъ дѣйствительные. Послѣ этого мы получимъ окончательныя выраженія для $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ въ функціи только извѣстныхъ величинъ. Подобнымъ-же образомъ опредѣлятся и остальные коэффиціенты. Если эти значенія коэффиціентовъ подставить въ формулы (33), то x, y, z не будутъ уже выражаться линейно въ функціи координатъ данныхъ точекъ, какъ это было для однородно-измѣняемой системы. Такимъ образомъ изученіе подобно измѣняемой системы трехъ измѣреній представляется въ аналитическомъ отношеніи менѣе удобнымъ, чѣмъ изученіе движенія системы однородно-измѣняемой, несмотря на то, что первая система есть частный случай второй.

Чтобы выразить непосредственно движеніе подобно-измѣняемой системы по движенію трехъ ея точекъ, возьмемъ начальныя положенія этихъ точекъ слѣдующимъ образомъ: M_1 въ началѣ координатъ, M_2 и M_3 на двухъ координатныхъ осяхъ, напр. на осяхъ (x) и (y) въ разстояніи равномъ единицѣ отъ начала координатъ. Тогда мы получимъ слѣдующія уравненія для опредѣленія коэффиціентовъ:

$$D_1 = x_1\,,\quad D_2 = y_1\,,\quad D_3 = z_1$$

$$E\cos\alpha_1 = x_2 - x_1\,,\quad E\cos\beta_1 = x_3 - x_1\,,$$

$$\begin{aligned} E\cos\gamma_1 &= \sqrt{E^2 - E^2\cos^2\alpha_1 - E^2\cos^2\beta_1} \\ &= \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (x_3 - x_1)^2}\,, \end{aligned}$$

$$E\cos\alpha_2 = y_2 - y_1\,,\quad E\cos\beta_2 = y_3 - y_1\,, \tag{50}$$

$$\begin{aligned} E\cos\gamma_2 &= \sqrt{E^2 - E^2\cos^2\alpha_2 - E^2\cos^2\beta_2} \\ &= \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - (y_3 - y_1)^2} \end{aligned}$$

$$E\cos\alpha_3 = z_2 - z_1\,,\quad E\cos\beta_3 = z_3 - z_1$$

$$\begin{aligned} E\cos\gamma_3 &= \sqrt{E^2 - E^2\cos^2\alpha_3 - E^2\cos^2\beta_3} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_3 - z_1)^2}\,. \end{aligned}$$

Поэтому уравненія движенія подобно-измѣняемой системы будутъ слѣдующія:

$$
\begin{aligned}
x&=x_1+(x_2-x_1)a+(x_3-x_1)b+\sqrt{(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-(x_3-x_1)^2}\,.\,c,\\
y&=y_1+(y_2-y_1)a+(y_3-y_1)b+\sqrt{(z_2-z_1)^2+(x_2-x_1)^2-(y_3-y_1)^2}\,.\,c,\\
z&=z_1+(z_2-z_1)a+(z_3-z_1)b+\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-(z_3-z_1)^2}\,.\,c.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Въ *плоской подобно-измѣняемой системѣ* уравненія движенія, въ зависимости отъ координатъ данныхъ точекъ, снова принимаютъ линейный видъ. Такое движеніе опредѣляется двумя точками, не связанными между собою никакими условіями. Выбравъ двѣ точки произвольно и положивъ для краткости

$$
\begin{aligned}
(a_2-a_1)(a_1-a)+(b_2-b_1)(b_1-b)&=p_1\\
(a_2-a_1)(a_2-a)+(b_2-b_1)(b_2-b)&=p_2\\
(b_2-b_1)(a_1-a)-(a_2-a_1)(b_1-b)&=q\,,
\end{aligned}
$$

получимъ: [1])

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{p_2x_1+p_1x_2-q(y_2-y_1)}{p_2-p_1},\\
y&=\frac{p_2y_1+p_1y_2+q(x_2-x_1)}{p_2-p_1},
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Для неизмѣняемой системы трехъ измѣреній, если ея движеніе будетъ задано движеніемъ трехъ ея точекъ, получаются формулы, подобныя формуламъ (50) и (51) и отличающіяся только тѣмъ, что вездѣ $E=1$. Точно также и для плоской неизмѣняемой системы уравненія движенія не имѣютъ линейнаго вида относительно координатъ заданныхъ точекъ, потому-что эти координаты связаны между собою уравненіями, не имѣющими линейнаго вида.

10. Однообразное движеніе измѣняемой системы.

Пусть будетъ m число независимыхъ между собою элементовъ, опредѣляющихъ движеніе какой-нибудь измѣняемой системы. Если будетъ задано нѣкоторое число k зависимостей между этими элементами, то система будетъ имѣть $m-k$ степеней свободы. Одному частному

---

[1]) См. „Кинематику подобно-измѣняемой системы двухъ измѣреній“, стр. 37 и слѣд.

случаю движенія однородно-измѣняемой системы съ ограниченнымъ числомъ степеней свободы, именно случаю, когда

$$m - k = 3$$

Burmester[1]) далъ названіе *однообразнаго движенія* (einförmige Bewegung). Это понятіе можно распространить на всякую измѣняемую систему. Изученіе такого частнаго вида движенія представляетъ интересъ особаго рода. А именно, если въ частности движеніе системы опредѣляется движеніемъ n точекъ, не связанныхъ между собою никакими условіями, и если $n - 1$ изъ этихъ точекъ сдѣлать неподвижными, а движеніе послѣдней точки задать произвольно, то получится однообразное движеніе, и это движеніе будетъ вполнѣ опредѣляться движеніемъ одной послѣдней изъ n заданныхъ точекъ. Эту точку мы будемъ называть *основною*. Можетъ случиться, что движеніе основной точки ограничено условіемъ оставаться на нѣкоторой поверхности или линіи; тогда однообразное движеніе дѣлается *ограниченнымъ* и обладаетъ только двумя или одною степенью свободы. Это будетъ также, если между задаваемыми точками существуютъ добавочныя условія. Такъ напр. подобно-измѣняемая система трехъ измѣреній можетъ имѣть однообразное движеніе только съ двумя степенями свободы, а неизмѣняемая система — однообразное движеніе съ одною степенью свободы.

Останавливаясь на случаѣ неограниченнаго однообразнаго движенія (съ тремя степенями свободы), можно видѣть, что траекторіи различныхъ точекъ системы будутъ обладать нѣкоторыми общими свойствами, которыя характеризуются какъ законами деформаціи системы, такъ и движеніемъ основной точки. Пусть будутъ X, Y, Z координаты этой точки; тогда уравненія движенія могутъ быть представлены такъ:

$$\begin{aligned} x &= \Phi_1 (a, b, c, X, Y, Z), \\ y &= \Phi_2 (a, b, c, X, Y, Z), \\ z &= \Phi_3 (a, b, c, X, Y, Z). \end{aligned} \tag{53}$$

Задавъ поверхность или линію, на которой должна находиться основная точка, можно по этимъ формуламъ опредѣлить поверхности или линіи, по которымъ будутъ двигаться остальныя точки системы.

Всякому движенію измѣняемой системы соотвѣтствуетъ движеніе другой измѣняемой системы, которое можно получить слѣдующимъ обра-

[1]) Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. B. 19 и 20.

зомъ. Траекторіи, которыя описываютъ точки, принадлежащія нѣкоторой кривой линіи данной системы, можно принять за различныя положенія линіи, принадлежащей другой измѣняемой системѣ, а за траекторіи точекъ этой послѣдней линіи принять различныя положенія линіи первой системы. Вообще говоря система втораго рода будетъ отличаться отъ данной системы какъ по свойствамъ движенія, такъ и по характеру деформаціи, потому-что кривыя линіи могутъ быть выбраны произвольно; но, прилагая эти разсужденія къ однообразному движенію системы, легко видѣть слѣдующее соотношеніе между обѣими системами: *однообразному движенію одной системы будетъ соотвѣтствовать однообразное-же движеніе другой системы.* Пусть будутъ

(54) $$f_1\,(X, Y, Z) = 0\,,\qquad f_2\,(X, Y, Z) = 0\,,$$

уравненія траекторіи основной точки. Исключая X, Y, Z изъ этихъ уравненій и изъ уравненій (53), получаемъ два уравненія вида:

(55) $$F_1\,(x, y, z, a, b, c) = 0,\qquad F_2\,(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

которыя, если дана точка (a, b, c), опредѣляютъ траекторію этой точки. Присоединяя къ уравненіямъ (55) еще уравненіе поверхности

(56) $$\varphi\,(a, b, c) = 0$$

и разсматривая уравненія (55) и (56) вмѣстѣ, будемъ имѣть цѣлую систему траекторій, описываемыхъ точками, принадлежащими поверхности (56). Вмѣсто этихъ уравненій мы можемъ разсматривать совокупность шести уравненій (53), (54) и (56) для опредѣленія этихъ-же самыхъ траекторій. Съ другой стороны уравненія (53) можно разсматривать какъ уравненія однообразнаго движенія нѣкоторой другой измѣняемой системы, въ которой a, b, c суть координаты основной точки, а X, Y, Z начальныя координаты какой-нибудь точки системы. Тогда уравненіе (56) опредѣляетъ поверхность, на которой должна оставаться основная точка. Исключая при помощи этого уравненія координаты a, b, c изъ уравненій (53), получимъ уравненіе вида

(57) $$F\,(x, y, z, X, Y, Z) = 0;$$

это уравненіе, если будетъ дана точка X, Y, Z, опредѣляетъ ту поверхность, на которой эта точка остается при движеніи системы. Присоединяя

къ уравненію (57) уравненія (54), мы получимъ систему поверхностей, на которыхъ остаются точки, принадлежащія линіи (54). Но вмѣсто этого мы можемъ опять разсматривать шесть уравненій (53), (54) и (56). Эти уравненія — тѣ самыя, которыя въ движеніи первоначальной измѣняемой системы служили для опредѣленія траекторій точекъ, принадлежащихъ данной въ системѣ поверхности. Итакъ мы видимъ:

Если однообразное движеніе измѣняемой системы опредѣляется движеніемъ основной точки по нѣкоторой заданной траекторіи, то различныя положенія поверхности, принадлежащей системѣ, можно разсматривать, какъ поверхности, на которыхъ должны оставаться точки, образующія кривую линію нѣкоторой другой измѣняемой системы, движеніе которой тоже однообразное и должно быть задано условіемъ, чтобы основная точка оставалась на нѣкоторой поверхности.

Разсуждая подобнымъ-же образомъ, можно далѣе сказать:

Траекторіи, описываемыя точками, образующими нѣкоторую кривую линію въ однообразномъ движеніи измѣняемой системы, въ которой основная точка описываетъ опредѣленную траекторію, можно разсматривать какъ различныя положенія кривой линіи въ однообразномъ движеніи другой измѣняемой системы, траекторіи точекъ которой совпадаютъ съ различными положеніями кривой линіи въ движеніи первой системы.

Послѣднее заключеніе приложимо очевидно и къ плоской измѣняемой системѣ, въ которой совокупность четырехъ уравненій:

$$x = \Phi_1 (a, b, X, Y),$$
$$y = \Phi_2 (a, b, X, Y),$$
$$f(X, Y) = 0, \qquad (58)$$
$$\varphi(a, b) = 0, \qquad (59)$$

можно разсматривать съ одной стороны какъ уравненія, опредѣляющія траекторіи точекъ, принадлежащихъ кривой линіи (59) въ однообразномъ движеніи системы, въ которомъ движеніе основной точки (X, Y) опредѣляется уравненіемъ (58), — а съ другой стороны какъ уравненія различныхъ положеній кривой линіи (58) въ однообразномъ движеніи другой измѣняемой системы, въ которой основная точка (a, b) описываетъ траекторію (59).

Соотвѣтствующія другъ-другу однообразныя движенія двухъ измѣняемыхъ системъ мы будемъ называть одно по отношенію къ другому *обращенными*[1]).

Другое общее свойство однообразныхъ движеній будетъ приведено въ главѣ V.

II. Однообразное движеніе коллинеарно-измѣняемой системы.

По общему опредѣленію однообразное движеніе коллинеарно-измѣняемой системы опредѣляется условіемъ, *чтобы четыре точки системы оставались неподвижными.*

Условимся называть траекторіи двухъ точекъ (x', y', z') и (x'', y'', z'') *коллинеарными между собою,* если между координатами этихъ точекъ существуютъ зависимости вида:

$$x'' = \frac{l_1x' + m_1y' + n_1z' + p_1}{qx' + ry_{,} + sz' + 1},$$

$$y'' = \frac{l_2x' + m_2y' + n_2z' + p_2}{qx' + ry' + sz' + 1},$$

$$z'' = \frac{l_3x' + m_3y' + n_3z' + p_3}{qx' + ry' + sz' + 1},$$

причемъ коэффиціенты $l_1, m_1, \ldots p_3, q, r, s$ постоянныя величины. Тогда изъ уравненій движенія коллинеарно-измѣняемой системы можно видѣть слѣдующее замѣчательное ея свойство: *въ однообразномъ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы траекторіи всѣхъ точекъ коллинеарны между собою*[2]).

Въ случаѣ однообразнаго движенія коллинеарно-измѣняемой системы, мы должны положить:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1, \; y_1 = b_1, \; z_1 = c_1, \\ x_2 &= a_2, \; y_2 = b_2, \; z_2 = c_2, \\ x_3 &= a_3, \; y_3 = b_3, \; z_3 = c_3, \\ x_4 &= a_4, \; y_4 = b_4, \; z_4 = c_4; \end{aligned}$$

такъ-что только координаты x_5, y_5, z_5 *основной точки* остаются произ-

---

[1]) Въ приложеніи къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ движенія плоской измѣняемой системы Burmester (Schlöm. Z. f. M. u. Ph. B. XIX и XX) разсматривалъ обращенное движеніе (Umkehrung).

[2]) Burmester, Z. f. M. u. Ph. B. XX.

вольными функціями времени. Тогда при внимательномъ разсмотрѣніи формулъ (39) и (40) оказывается, что P выражается линейно черезъ координаты основной точки, а α, β, γ выражаются отношеніями линейныхъ функцій этихъ координатъ; то-же можно сказать и относительно коэффиціентовъ A_1, B_1, . . . D_3. А именно, мы имѣемъ теперь

$$\Sigma a_k\, x_k\, S_k = \begin{vmatrix} a_1^2, & a_1, b_1, c_1, 1 \\ a_2^2, & a_2, b_2, c_2, 1 \\ a_3^2, & a_3, b_3, c_3, 1 \\ a_4^2, & a_4, b_4, c_4, 1 \\ a_5 x_5, & a_5, b_5, c_5, 1 \end{vmatrix};$$

слѣдовательно координаты основной точки будутъ входить лишь по одному разу въ каждомъ изъ элементовъ опредѣлителя P; при этомъ легко замѣтить, что члены, содержащіе произведенія

$$\begin{gathered} a_5\, x_5\, S_5 \,.\, b_5\, y_5\, S_5\,, \\ a_5\, x_5\, S_5 \,.\, c_5\, z_5\, S_5\,, \\ b_5\, y_5\, S_5 \,.\, c_5\, z_5\, S_5\,, \end{gathered}$$

будутъ входить попарно съ положительными и отрицательными знаками и сократятся, а останутся лишь члены, содержащіе одну изъ координатъ x_5, y_5, z_5 или вовсе ихъ не содержащіе. То-же самое будетъ и въ числителяхъ формулъ (40); Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 будутъ поэтому выражаться отношеніями линейныхъ функцій отъ x_5, y_5, z_5 къ P. Далѣе, формулы (41) показываютъ, что каждый изъ коэффиціентовъ A_1, B_1 . . . D_3 можетъ быть выраженъ формулою, которая не содержитъ явнымъ образомъ координатъ основной точки; поэтому эти коэффиціенты будутъ тоже выражаться отношеніями линейныхъ функцій отъ x_5, y_5, z_5 къ P. Подставляя выраженія всѣхъ коэффиціентовъ въ формулы (5), мы увидимъ, что координаты какой-либо точки системы выразятся отношеніями трехъ линейныхъ функцій отъ x_5, y_5, z_5 къ одной и той-же четвертой линейной функціи этихъ координатъ. Такимъ образомъ траекторія каждой точки будетъ коллинеарна по отношенію къ траекторіи точки (x_5, y_5, z_5). Отсюда слѣдуетъ очевидно, что координаты вообще двухъ какихъ-либо точекъ системы будутъ находиться въ коллинеарной зависимости, такъ какъ всякая точка системы можетъ быть принята за основную.

Можно также сдѣлать и обратное заключеніе: если траекторіи всѣхъ

точекъ коллинеарны по отношенію другъ-къ-другу, то движеніе коллинеарно-измѣняемой системы — однообразное. Чтобы это видѣть, нужно только замѣтить, что когда координаты четырехъ произвольно выбранныхъ точекъ выражаются отношеніями трехъ линейныхъ функцій координатъ пятой точки къ одной и той-же четвертой линейной функціи этихъ координатъ, то, какъ показываетъ составъ формулъ (39), (40) и (41) и вышеприведенныя разсужденія этого §, нетолько координаты всѣхъ точекъ будутъ выражаться коллинеарнымъ образомъ черезъ координаты пятой точки, но могутъ быть найдены четыре точки, которыя все время остаются неподвижными. Мы не будемъ на этомъ подробнѣе останавливаться, тѣмъ болѣе, что съ этимъ вопросомъ мы встрѣтимся еще въ главѣ о скоростяхъ.

Уравненія однообразнаго движенія коллинеарно-измѣняемой системы можно получить въ довольно простомъ видѣ въ зависимости отъ координатъ основной точки, если надлежащимъ образомъ выбрать положенія четырехъ неподвижныхъ точекъ. Принимая во вниманіе, что видъ уравненій (5) не мѣняется отъ преобразованія прямоугольныхъ координатныхъ осей въ косоугольныя, мы можемъ начало координатъ помѣстить въ одной изъ вершинъ тетраэдра, опредѣляемаго четырьмя неподвижными точками, а оси направить по тремъ сходящимся ребрамъ этого тетраэдра. Означая черезъ s_1, s_2, s_3 длины этихъ реберъ, для координатъ четырехъ неподвижныхъ точекъ мы будемъ имѣть:

$$M_1\,(s_1, 0, 0),\ M_2\,(0, s_2, 0),\ M_3\,(0, 0, s_3),\ M_4\,(0, 0, 0). \tag{60}$$

Означая черезъ A, B, C начальныя значенія координатъ X, Y, Z основной точки, подставляя координаты (60) послѣдовательно въ уравненія (5) и выражая условіе, что эти координаты при движеніи системы не измѣняются, получаемъ:

$$\begin{gathered}
A_1 = \alpha s_1 + 1\,,\quad A_2 = 0\,,\quad A_3 = 0,\\
B_1 = 0\,,\quad B_2 = \beta s_2 + 1\,,\quad B_3 = 0,\\
C_1 = 0\,,\quad C_2 = 0\,,\quad C_3 = \gamma s_3 + 1,\\
D_1 = 0\,,\quad D_2 = 0\,,\quad D_3 = 0,\\
A(X - s_1)\alpha + BX.\beta + CX.\gamma = A - X,\\
AY.\alpha + B(Y - s_2).\beta + CY.\gamma = B - Y,\\
AZ.\alpha + BZ.\beta + C(Z - s_3).\gamma = C - Z;
\end{gathered}$$

откуда

$$\alpha = \frac{(s_2 C + s_3 B - s_2 s_3)X - s_3 A Y - s_2 A Z + s_2 s_3 A}{A(s_2 s_3 X + s_3 s_1 Y + s_1 s_2 Z - s_1 s_2 s_3)},$$

$$\beta = \frac{(s_3 A + s_1 C - s_3 s_1)Y - s_1 B Z - s_3 B X + s_3 s_1 B}{B(s_2 s_3 X + s_3 s_1 Y + s_1 s_2 Z - s_1 s_2 s_3)},$$

$$\gamma = \frac{(s_1 B + s_2 A - s_1 s_2)Z - s_2 C X - s_1 C Y + s_1 s_2 C}{C(s_2 s_3 X + s_3 s_1 Y + s_1 s_2 Z - s_1 s_2 s_3)}.$$

Полагая

$$\begin{gathered} s_2 s_3 X + s_3 s_1 Y + s_1 s_2 Z - s_1 s_2 s_3 = Q, \\ s_2 s_3 A + s_3 s_1 B + s_1 s_2 C - s_1 s_2 s_3 = Q_0, \end{gathered} \qquad (61)$$

будемъ имѣть:

$$\alpha s_1 + 1 = \frac{Q_0 X}{QA},$$

$$\beta s_2 + 1 = \frac{Q_0 Y}{QB},$$

$$\gamma s_3 + 1 = \frac{Q_0 Z}{QC}.$$

Опредѣляя отсюда α, β, γ и подставляя въ уравненія движенія, которыя теперь имѣютъ видъ

$$x = \frac{(\alpha s_1 + 1)a}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$

$$y = \frac{(\beta s_2 + 1)b}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$

$$z = \frac{(\gamma s_3 + 1)c}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$

получимъ:

$$x = \frac{Q_0}{A} \frac{Xa}{\frac{Q_0 X - QA}{s_1 A} a + \frac{Q_0 Y - QB}{s_2 B} b + \frac{Q_0 Z - QC}{s_3 C} c + Q},$$

$$y = \frac{Q_0}{B} \frac{Yb}{\frac{Q_0 X - QA}{s_1 A} a + \frac{Q_0 Y - QB}{s_2 B} b + \frac{Q_0 Z - QC}{s_3 C} c + Q}, \qquad (62)$$

$$z = \frac{Q_0}{C} \frac{Zc}{\frac{Q_0 X - QA}{s_1 A} a + \frac{Q_0 Y - QB}{s_2 B} b + \frac{Q_0 Z - QC}{s_3 C} c + Q}.$$

Изъ этихъ формулъ прямо видно выраженное въ началѣ этого § свойство однообразнаго движенія коллинеарно-измѣняемой системы, если принять во вниманіе, что Q линейная функція координатъ основной точки.

Принимая траекторіи точекъ, принадлежащихъ какой-нибудь поверхности системы, за различныя положенія кривыхъ линій другой измѣняемой системы, мы видимъ, что эта система тоже будетъ коллинеарно-измѣняемая. Итакъ, движеніе, обращенное по отношенію къ однообразному движенію коллинеарно-измѣняемой системы, будетъ также однообразнымъ движеніемъ коллинеарно-измѣняемой системы.

Всѣ свойства однообразнаго движенія, найденныя Burmester'омъ для каждаго частнаго случая особымъ путемъ разсужденій, вытекаютъ непосредственно изъ предыдущихъ формулъ. Для примѣра приведемъ слѣдующія:

неподвижныя точки во второмъ однообразномъ движеніи тѣ же самыя, какъ въ первомъ движеніи;

если основная точка подчинена условію оставаться на алгебраической поверхности порядка n, то всѣ точки системы будутъ двигаться по поверхностямъ того-же порядка;

въ частности, если основная точка описываетъ плоскую кривую линію, то траекторіи всѣхъ точекъ будутъ плоскія кривыя;

если основная точка движется прямолинейно, то движеніе всѣхъ точекъ будетъ прямолинейное.

Однообразное движеніе плоской коллинеарно-измѣняемой системы получается, если три точки такой системы сдѣлать неподвижными. Все сказанное выше о системѣ трехъ измѣреній можетъ быть съ соотвѣтственными измѣненіями отнесено и къ этой системѣ.

12. Однообразное движеніе частныхъ видовъ коллинеарно-измѣняемой системы.

Такъ-какъ движеніе однородно-измѣняемой системы опредѣляется движеніемъ четырехъ ея точекъ, то она будетъ имѣть однообразное движеніе, если три точки ея будутъ неподвижны. Если назвать траекторіи двухъ точекъ находящимися въ однородной зависимости, когда ихъ координаты связаны между собою линейнымъ образомъ, то можно сказать на основаніи формулъ (46), что въ однообразномъ движеніи однородно-измѣняемой системы траекторіи всѣхъ точекъ находятся въ однородной

зависимости по отношенію къ траекторіи основной точки, а слѣдовательно также и по отношенію другъ-къ-другу. Можно сдѣлать и обратное заключеніе: если траекторіи всѣхъ точекъ однородно-измѣняемой системы находятся между собою въ однородной зависимости, то движеніе системы однообразное.

Обращеніе однообразнаго движенія однородно-измѣняемой системы даетъ также однообразное движеніе однородно-измѣняемой системы.

Представимъ уравненія этого движенія въ возможно простомъ видѣ. Для этого возьмемъ начало координатъ въ одной изъ неподвижныхъ точекъ а оси x и y направимъ черезъ двѣ другія неподвижныя точки. Подставляя координаты неподвижныхъ точекъ $M_1(s_1, 0, 0)$, $M_2(0, s_2\ 0)$, $M_3(0, 0, 0)$ послѣдовательно въ уравненія (25) и выражая условіе, что координаты этихъ точекъ во время движенія не измѣняются, получимъ:

$$\begin{array}{lll} A_1 = 1, & A_2 = 0, & A_3 = 0, \\ B_1 = 0, & B_2 = 1, & B_3 = 0, \\ D_1 = 0, & D_2 = 0, & D_3 = 0. \end{array} \tag{63}$$

Для опредѣленія остальныхъ трехъ коэффиціентовъ, подставимъ въ уравненія (25) координаты основной точки. Принявъ во вниманіе (63), получимъ:

$$C_1 = \frac{X - A}{C}, \quad C_2 = \frac{Y - B}{C}, \quad C_3 = \frac{Z}{C}.$$

Такимъ образомъ уравненія движенія примутъ видъ:

$$x = a + \frac{X - A}{C} c,$$

$$y = b + \frac{Y - B}{C} c.$$

$$z = \frac{Z}{C} c.$$

Однообразное движеніе плоской однородно-измѣняемой системы мы получимъ, сдѣлавъ неподвижными двѣ ея точки.

Обращаясь къ системѣ подобно-измѣняемой трехъ измѣреній, мы находимъ, что для полученія ея однообразнаго движенія нужно поставить иныя условія, чѣмъ въ предыдущихъ случаяхъ. Если сдѣлать двѣ точки

неподвижными, то система обращается въ неизмѣняемую, вращающуюся около постоянной оси, потому-что для сохраненія подобія теперь нужно, чтобы разстоянія между всякими двумя точками не измѣнялись. Для того, чтобы движеніе одной точки могло оставаться совершенно произвольнымъ, нужно для двухъ другихъ точекъ поставить четыре условія, т. е. или сдѣлать одну изъ точекъ неподвижною, а для другой задать поверхность, или задать траекторіи обѣихъ точекъ. Нелинейный видъ уравненій (51) показываетъ, что при этомъ движеніе основной точки должно быть подчинено нѣкоторымъ условіямъ, выражаемымъ неравенствами, если мы хотимъ, чтобы координаты точекъ системы не принимали во время движенія мнимыхъ значеній.

Однообразное движеніе плоской подобно-измѣняемой системы опредѣляется условіемъ, чтобы одна точка системы оставалась неподвижною, причемъ другая точка, основная, можетъ имѣть какое угодно движеніе [1]).

Предполагая, что траекторіи двухъ точекъ плоской подобно-измѣняемой системы находятся въ однородной или коллинеарной зависимости, мы не получимъ уже однообразнаго движенія этой системы. По уравненіямъ (52) легко при этомъ видѣть, что траекторіи всѣхъ точекъ будутъ въ однородной или коллинеарной зависимости между собою. Обращеніе движенія дастъ уже движеніе системы однородно-измѣняемой или коллинеарно-измѣняемой.

Что касается до неизмѣняемой системы, то у нея не существуетъ такого однообразнаго движенія, при которомъ одна точка неподвижна, а другая, основная, можетъ имѣть какое угодно движеніе; но согласно съ предыдущимъ можно всякое движеніе неизмѣняемой системы съ тремя степенями свободы разсматривать какъ однообразное. Для того, чтобы при этомъ и обращенное движеніе было движеніемъ неизмѣняемой системы, можно взять только какое-нибудь поступательное движеніе.

---

[1]) См. Burmester, Schlöm. Zeitschr. f. Math. u. Ph. и „Кинематику подобно-измѣняемой системы“ П. Сомова.

ГЛАВА II.

Деформація коллинеарно-измѣняемой системы.

13. Объ изученіи деформаціи вообще.

Переходя къ изученію деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы, сдѣлаемъ прежде всего общее замѣчаніе касательно избраннаго нами для этого пріема. Обыкновенный пріемъ, употребляемый главнымъ образомъ въ теоріи упругости и въ гидродинамикѣ, основанъ на разсматриваніи безконечно-малыхъ элементовъ системы, изъ которыхъ каждый можно считать системою однородно-измѣняемою. Изучая, какъ измѣняются, съ переходомъ отъ одной точки данной системы къ другой, направленія главныхъ осей деформаціи и величины удлиненій по этимъ осямъ, можно составить себѣ понятіе о деформаціи всей данной системы. Далеко не всегда такой пріемъ приводитъ къ цѣли, такъ какъ это часто приводитъ къ сложнымъ вычисленіямъ, не соотвѣтствующимъ характеру деформаціи, которая можетъ быть при этомъ весьма простою по своимъ геометрическимъ свойствамъ. Вслѣдствіе этого теряется наглядное представленіе объ этой деформаціи. Это становится понятнымъ, если принять во вниманіе, что различныя измѣняемыя системы подчиняются различнымъ законамъ деформаціи, которые, если разсматривать измѣняемую систему конечныхъ измѣреній, по своему характеру могутъ вовсе не соотвѣтствовать параметрамъ, измѣряющимъ деформацію однородно-измѣняемой системы.

Въ такихъ случаяхъ другой путь можетъ скорѣе и проще привести къ цѣли. Для каждой измѣняемой системы мы можемъ выбирать особые

параметры деформаціи, такіе, которые для этой системы наиболѣе характерны и которые поэтому наиболѣе простымъ и нагляднымъ образомъ выражаютъ законы деформаціи этой системы.

Эти послѣднія соображенія относятся и къ изученію деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній. Мы знаемъ уже, что однородно-измѣняемая система представляетъ собою частный случай системы коллинеарно-измѣняемой; поэтому мы найдемъ параметры деформаціи, характерные для коллинеарно-измѣняемой системы, если изъ уравненій движенія этой системы выдѣлимъ тѣ элементы, которые опредѣляютъ движеніе однородно-измѣняемой системы, и опредѣлимъ движеніе, которое послѣ этого останется у коллинеарно-измѣняемой системы.

14. Выдѣленіе деформаціи, характеризующей коллинеарно-измѣняемую систему.

Три общія уравненія движенія коллинеарно-измѣняемой системы (5) можно замѣнить слѣдующими шестью:

$$(64)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{A_1}{k}a + \dfrac{B_1}{k}b + \dfrac{C_1}{k}c + \dfrac{D_1}{k}, \\[2ex] \eta = \dfrac{A_2}{k}a + \dfrac{B_2}{k}b + \dfrac{C_2}{k}c + \dfrac{D_2}{k}, \\[2ex] \zeta = \dfrac{A_3}{k}a + \dfrac{B_3}{k}b + \dfrac{C_3}{k}c + \dfrac{D_3}{k}, \end{cases}$$

$$(65)\quad \begin{cases} x = \dfrac{k\xi}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1}, \\[2ex] y = \dfrac{k\eta}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1}, \\[2ex] z = \dfrac{k\zeta}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1}; \end{cases}$$

причемъ въ послѣднихъ трехъ формулахъ можно, воспользовавшись уравненіями (64), подставить:

$$(66)\qquad \alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = k(\lambda_x\xi + \lambda_y\eta + \lambda_z\zeta + 1),$$

гдѣ

$$(67)\quad \lambda_x = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}, \ \lambda_y = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_3, & B_3, & C_3 \\ A_1, & B_1, & C_1 \end{vmatrix}, \ \lambda_z = \frac{1}{\triangle}\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix}.$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix}, \tag{68}$$

$$k = 1 - (D_1 \lambda_x + D_2 \lambda_y + D_3 \lambda_z). \tag{69}$$

Сравнивая формулы (67) и (68) съ формулами (6) и (7), мы видимъ, что $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ отличаются только знакомъ отъ величинъ λ, μ, ν формулъ (4).

Такимъ образомъ отъ начальнаго положенія всякой точки коллинеарно-измѣняемой системы къ ея конечному положенію можно перейти помощью двухъ слѣдующихъ преобразованій, формулъ (64) и такихъ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1}, \\ y &= \frac{\eta}{\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1}, \\ z &= \frac{\zeta}{\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1}. \end{aligned} \tag{70}$$

Уравненія (64) выражаютъ въ самомъ общемъ видѣ движеніе однородно-измѣняемой системы, а формулы (70) опредѣляютъ движеніе, которое характеризуетъ деформацію собственно коллинеарно-измѣняемой системы. Эту деформацію мы будемъ называть *раздвиганіемъ*, по причинамъ, которыя будутъ объяснены въ слѣдующихъ §§.

15. О раздвиганіи.

Условимся называть *раздвиганіемъ* измѣняемой системы такое ея движеніе, въ которомъ всѣ точки, лежащія въ параллельныхъ между собою плоскостяхъ, переходятъ въ плоскости, параллельныя первоначальнымъ, перемѣщаясь при этомъ по векторамъ, проведеннымъ къ нимъ изъ одного общаго полюса, который мы будемъ называть *центромъ раздвиганій*. Можно будетъ показать, что формулы (70) выражаютъ деформацію именно такого вида.

Пусть будетъ O центръ раздвиганій а δ и δ' разстоянія его отъ одной изъ параллельныхъ плоскостей *до* и *послѣ* раздвиганія. Величину

$$\sigma = \frac{\delta' - \delta}{\delta \delta'}$$

условимся называть *величиною раздвиганія*, а направленіе нормали,

проведенной изъ точки O къ плоскости P, которая подвержена раздвиганію, въ ту сторону, куда происходитъ перемѣщеніе этой плоскости,— *направленіемъ раздвиганія.* Ниже мы увидимъ, чѣмъ оправдывается сдѣланный нами выборъ выраженія для измѣренія величины раздвиганія. Мы увидимъ также, что эту *величину раздвиганія удобно изображать графически, откладывая ее изъ центра раздвиганій въ видѣ вектора по направленію раздвиганія.*

Замѣтимъ зависимость между величиною раздвиганія и коэффиціентами плоскости *до* и *послѣ* раздвиганія. Если x_0, y_0 z_0 суть координаты центра раздвиганій и

$$\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z + \mu = 0$$

уравненіе раздвигаемой плоскости, то координаты какой-либо ея точки послѣ раздвиганія будутъ:

$$(71) \qquad \begin{aligned} x' &= x + \sigma \delta' (x - x_0), \\ y' &= y + \sigma \delta' (y - y_0), \\ z' &= z + \sigma \delta' (z - z_0), \end{aligned}$$

и будутъ удовлетворять уравненію

$$\lambda_x x' + \lambda_y y' + \lambda_z z' + \mu' = 0.$$

Между σ, μ и μ' будетъ поэтому слѣдующая зависимость:

$$(72) \qquad \mu' = \mu + \sigma \delta' (\lambda_x x_0 + \lambda_y y_0 + \lambda_z z_0 + \mu).$$

Деформація коллинеарно-измѣняемой системы въ общемъ случаѣ сопряжена съ раздвиганіями, имѣющими общее направленіе и одинаковую величину. Можно видѣть, что этими раздвиганіями и характеризуется отличіе деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы отъ деформаціи системы однородно-измѣняемой; такъ-что послѣднюю можно разсматривать какъ систему коллинеарно-измѣняемую, только лишенную раздвиганій. Дѣйствительно, формулы (70) опредѣляютъ раздвиганіе по направленію, нормальному къ плоскости:

$$(73) \qquad \lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = \text{пост.} = q;$$

потому-что координаты всѣхъ точекъ, лежащихъ въ этой плоскости, увеличиваются въ отношеніи $1 : q$ при перемѣщеніи, выраженномъ форму-

лами (70), и слѣдовательно, двигаясь по векторамъ, проведеннымъ къ точкамъ этой плоскости изъ начала координатъ, переходятъ въ другую плоскость, параллельную первой. Центромъ раздвиганій служитъ начало координатъ. Точно такъ-же точки, лежащія въ какой-нибудь другой плоскости, параллельной плоскости (73), получаютъ раздвиганіе по тому-же направленію и съ тѣмъ-же центромъ.

Величина раздвиганія будетъ одинакова для всѣхъ параллельныхъ между собою плоскостей. Дѣйствительно, по формуламъ (71) и (70) для величины раздвиганія мы получаемъ:

$$\begin{aligned}\sigma\delta' &= \frac{x-\xi}{\xi} = \frac{y-\eta}{\eta} = \frac{z-\zeta}{\zeta}\\ &= -\frac{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta}{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta+1} = \frac{1-q}{q}\,.\end{aligned} \tag{74}$$

А постоянный членъ въ уравненіи плоскости послѣ раздвиганія получимъ, принявъ во вниманіе, что теперь по формулѣ (72)

$$\mu' = (1-q)(1+\sigma\delta') = \frac{1-q}{q}\,. \tag{75}$$

Такъ какъ

$$\delta' = \frac{\mu'}{\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}}\,.$$

то, исключивъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій μ', найдемъ

$$\delta' = \frac{1-q}{q\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}} = \frac{\sigma\delta'}{\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}}\,.$$

откуда

$$\sigma = \sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}\,. \tag{76}$$

Итакъ величина раздвиганія не зависитъ отъ начальнаго разстоянія плоскости отъ центра раздвиганій, т. е. одинакова для всѣхъ параллельныхъ между собою плоскостей.

Формулы (45) и (67) могутъ служить для опредѣленія величины и направленія раздвиганія, когда движеніе системы задано движеніемъ пяти точекъ.

16. Перемѣщенія раздвигаемыхъ плоскостей.

Прослѣдимъ, какъ измѣняется отношеніе перемѣщенія раздвигаемой плоскости къ ея первоначальному разстоянію отъ центра раздвиганій, т. е.

$$\frac{\delta' - \delta}{\delta} = \sigma\delta'$$

съ измѣненіемъ q отъ $-\infty$ до $+\infty$. При

$$q = -\infty$$

формула (74) даетъ

$$\frac{\delta' - \delta}{\delta} = -1,$$

а формула (75)

$$\mu' = -1;$$

стало быть всѣ точки, лежавшія въ безконечно-далекой плоскости

(77) $$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta = -\infty,$$

перешли въ плоскость

(78) $$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta = 1.$$

При измѣненіи q отъ $-\infty$ до $-\varepsilon$, гдѣ ε безконечно-малая положительныя величина, $\frac{\delta' - \delta}{\delta}$ будетъ, оставаясь отрицательнымъ, приближаться къ $-\infty$, и точки, лежавшія въ плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = -\varepsilon,$$

удаляются въ безконечность.

При

$$q = +\varepsilon,$$

$\frac{\delta' - \delta}{\delta}$ будетъ положительнымъ безконечно-большимъ числомъ, и точки плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = +\varepsilon$$

удаляются въ безконечность по направленіямъ, прямо противуположнымъ перемѣщеніямъ соотвѣтственныхъ точекъ предыдущей плоскости. Такимъ образомъ, при непрерывномъ раздвиганіи коллинеарно-измѣняемой системы, точки плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = 0$$

переходятъ въ безконечно-удаленную плоскость и черезъ безконечность —въ другую безконечно-удаленную плоскость, параллельную первой, но лежащую съ другой стороны отъ центра раздвиганій.

При измѣненіи q отъ 0 до $+1$, $\frac{\delta'-\delta}{\delta}$ отъ $+\infty$ приближается къ 0, и слѣдовательно точки плоскости

$$\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta=0$$

не претерпѣваютъ раздвиганія, т. е. эта плоскость при раздвиганіи всей системы остается неподвижною и всѣ точки ея сохраняютъ свое положеніе.

Наконецъ, при измѣненіи q отъ $+1$ до $+\infty$, $\frac{\delta'-\delta}{\delta}$ принимаетъ отрицательныя значенія и переходитъ въ -1. Точки, лежавшія первоначально въ безконечно-далекой плоскости, находящейся по другую сторону отъ центра раздвиганій чѣмъ плоскость (77), переходятъ въ плоскость (78).

Итакъ, для конечнаго раздвиганія коллинеарно-измѣняемой системы характерны три слѣдующихъ параллельныхъ между собою плоскости: 1) двѣ плоскости, находящіяся на разстояніи

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2+\lambda_z^2}}$$

отъ центра раздвиганій по разныя отъ него стороны; одна изъ нихъ при раздвиганіи удаляется въ безконечность, а другая представляетъ собою конечное положеніе плоскости, находившейся до раздвиганія въ безконечности, и 2) плоскость, проходящая черезъ центръ раздвиганій, представляющая геометрическое мѣсто точекъ, которыя при раздвиганіи остаются неподвижными.

17. Разложеніе раздвиганія по координатнымъ осямъ.

Раздвиганіе по своему кинематическому значенію представляетъ аналогію съ другими кинематическими элементами. Эта аналогія проявляется между прочимъ въ вопросѣ о составномъ раздвиганіи, т. е. о перемѣщеніи коллинеарно-измѣняемой системы, состоящемъ изъ двухъ послѣдовательныхъ раздвиганій. Къ этому вопросу въ общемъ видѣ мы обратимся ниже, а теперь покажемъ, что раздвиганіе, если его изобра-

жать графически, какъ это указано въ § 15, можетъ быть разложено по координатнымъ осямъ.

Формулы (70) опредѣляютъ раздвиганіе, центръ котораго находится въ началѣ координатъ. Замѣнимъ теперь эти формулы болѣе общими, предположивъ, что центръ раздвиганій находится въ какой-нибудь другой точкѣ (x_0, y_0, z_0); эти формулы будутъ:

$$
(79) \qquad
\begin{aligned}
x - x_0 &= \frac{\xi - x_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + \lambda_y(\eta - y_0) + \lambda_z(\zeta - z_0) + 1}, \\
y - y_0 &= \frac{\eta - y_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + \lambda_y(\eta - y_0) + \lambda_z(\zeta - z_0) + 1}, \\
z - z_0 &= \frac{\xi - z_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + \lambda_y(\eta - y_0) + \lambda_z(\zeta - z_0) + 1}.
\end{aligned}
$$

Пусть будутъ λ_x, λ_y, λ_z величины трехъ раздвиганій, происходящихъ по направленіямъ координатныхъ осей около одного и того-же центра (x_0, y_0, z_0). Координаты какой-нибудь точки въ этихъ послѣдовательныхъ раздвиганіяхъ будутъ выражаться слѣдующимъ образомъ: въ первомъ раздвиганіи, по оси x:

$$
x' - x_0 = \frac{\xi - x_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1}, \qquad y' - y_0 = \frac{\eta - y_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1},
$$

$$
z' - z_0 = \frac{\zeta - z_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1};
$$

во второмъ раздвиганіи, по оси y:

$$
x'' - x_0 = \frac{x' - x_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1}, \qquad y'' - y_0 = \frac{y' - y_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1},
$$

$$
z'' - z_0 = \frac{z' - z_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1};
$$

а въ третьемъ раздвиганіи, по оси z:

$$
x - x_0 = \frac{x'' - x_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1}, \qquad y - y_0 = \frac{y'' - y_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1},
$$

$$
z - z_0 = \frac{z'' - z_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1}.
$$

Исключая изъ этихъ девяти уравненій координаты x', y', z', x'', y'', z'', мы получимъ формулы (79), опредѣляющія раздвиганіе, величина котораго равна $\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}$, а направленіе составляетъ съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ пропорціональны величинамъ слагаемыхъ раздвиганій. Отсюда слѣдуетъ:

Всякое раздвиганіе можетъ быть разложено на три раздвиганія по направленіямъ осей координатъ съ тѣмъ-же общимъ центромъ, какъ и данное раздвиганіе, причемъ величинами раздвиганій будутъ проекціи на осяхъ координатъ величины даннаго раздвиганія. Легко видѣть, что эти раздвиганія могутъ быть произведены въ какомъ угодно порядкѣ.

18. Деформація однородно-измѣняемой системы.

Для опредѣленія деформаціи и вообще свойствъ перемѣщенія коллинеарно-измѣняемой системы, мы должны кромѣ раздвиганій принять во вниманіе движеніе, выражаемое формулами (64), т. е. движеніе однородно-измѣняемой системы. Хотя изученіе этого движенія можно найти съ большею или меньшею подробностью во многихъ сочиненіяхъ по гидродинамикѣ и по теоріи упругости*), мы должны его разсмотрѣть здѣсь, ввиду того, что этотъ вопросъ тѣсно связанъ съ кинематикою коллинеарно-измѣняемой системы. При этомъ намъ придется обратить вниманіе на нѣкоторыя его стороны, которыя обыкновенно не затрогиваются, но представляютъ интересъ при характеристикѣ движенія коллинеарно-измѣняемыхъ системъ вообще.

Полное перемѣщеніе однородно-измѣняемой системы мы можемъ разложить на слѣдующія три части: 1) на поступательное перемѣщеніе системы, опредѣляемое перемѣщеніемъ одной изъ его точекъ, которая можетъ быть выбрана произвольно; 2) на вращательное движеніе системы около этой точки безъ измѣненія формы и 3) на чистую деформацію, при которой, какъ мы уже знаемъ, шаръ, произвольно выдѣленный въ системѣ, превращается въ эллипсоидъ. Полагая

---

*) Thomson and Tait, Natural Philosophy §§ 154—185.
Kirchhoff, Mechanik, Zehnte Vorlesung.
Жуковскій, Кинематика жидкаго тѣла, Мат. Сборн. Москов. М. О. 1876 г. и Гидродинамика.
Бобылевъ, Гидростатика и теорія упругости.
Ibbetson, Math. theory of perfectly elastic solids §§ 47—129 и др.

$$
\begin{aligned}
x &= X + D_1 ,\\
y &= Y + D_2 ,\\
z &= Z + D_3 ,\\
X &= A_1 a + B_1 b + C_1 c ,\\
Y &= A_2 a + B_2 b + C_2 c ,\\
Z &= A_3 a + B_3 b + C_3 c ,
\end{aligned}
\tag{80}
$$

мы можемъ разсматривать D_1, D_2, D_3 какъ слагаемыя поступательнаго перемѣщенія системы, равнаго перемѣщенію точки, находившейся въ начальный моментъ въ началѣ координатъ. Такъ какъ деформація системы происходитъ во всѣхъ ея частяхъ однороднымъ образомъ, то для ея изученія достаточно изучить деформацію какой-либо ея части. Для этого мы выберемъ шаръ, центръ котораго въ точкѣ (D_1, D_2, D_3), а радіусъ равенъ единицѣ. Чтобы опредѣлить зависимость коэффиціентовъ въ формулахъ (80), опредѣляющихъ вращеніе и чистую деформацію системы, отъ обѣихъ этихъ частей перемѣщенія, проведемъ черезъ точку (D_1, D_2, D_3) новыя координатныя оси (ξ, η, ζ), совпадающія въ разсматриваемый моментъ движенія съ главными осями эллипсоида, въ который деформировался данный шаръ. Эти оси въ сравненіи со всякими другими тремя ортогональными направленіями имѣютъ то отличительное свойство, что онѣ и до деформаціи были ортогональными. Это можно видѣть слѣдующимъ образомъ. Въ одномъ изъ большихъ круговъ первоначальнаго шара проведемъ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра и двѣ системы параллельныхъ имъ хордъ. По основному свойству однородно-измѣняемой системы всѣ параллельныя между собою хорды и послѣ деформаціи остаются параллельными. Притомъ средины этихъ хордъ остаются ихъ срединами, такъ какъ линейное расширеніе всѣхъ прямыхъ линій происходитъ одинаковымъ образомъ во всѣхъ ея частяхъ (§ 4) и слѣдовательно обѣ половины хорды удлиняются одинаковымъ образомъ. Отсюда слѣдуетъ, что оба діаметра круга обратятся въ сопряженные діаметры эллипса, въ который кругъ деформируется. Очевидно теперь, что и обратное заключеніе справедливо: всякіе два сопряженныхъ діаметра эллипса, если только онъ до деформаціи былъ кругомъ, были первоначально взаимно-перпендикулярными діаметрами этого круга; слѣдовательно всякіе три сопряженныхъ діаметра эллипсоида, въ который обратился шаръ, были первоначально ортогональными діаметрами этого шара. Это слѣдуетъ сказать и относительно главныхъ осей

эллипсоида. Это суть слѣдовательно такія три ортогональныя прямыя, которыя при деформаціи системы остаются ортогональными. Поэтому мы можемъ движеніе, выражаемое формулами (80), разсматривать состоящимъ изъ вращательнаго перемѣщенія этихъ ортогональныхъ прямыхъ, по направленію которыхъ мы примемъ координатныя оси (ξ, η, ζ), и изъ деформаціи, при которой эти оси уже своего направленія не измѣняютъ.

Пусть будутъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ косинусы угловъ, составляемыхъ начальными направленіями этихъ осей съ неподвижными осями координатъ, и $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \beta_1', \beta_2', \beta_3', \gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ — ихъ направленія послѣ вращенія системы. Означая черезъ ξ, η, ζ начальныя координаты точекъ системы по отношенію къ этимъ осямъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c\,, \\ \eta &= \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c\,, \\ \zeta &= \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c\,. \end{aligned} \tag{81}$$

Пусть будутъ ξ', η', ζ' координаты той-же точки системы по отношенію къ подвижнымъ осямъ координатъ *послѣ* деформаціи; тогда можно написать:

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1' \xi' + \beta_1' \eta' + \gamma_1' \zeta'\,, \\ Y &= \alpha_2' \xi' + \beta_2' \eta' + \gamma_2' \zeta'\,, \\ Z &= \alpha_3' \xi' + \beta_3' \eta' + \gamma_3' \zeta'\,. \end{aligned} \tag{82}$$

Разсмотримъ шаръ, описанный около подвижнаго начала координатъ радіусомъ равнымъ единицѣ. Уравненіе его по отношенію къ подвижнымъ осямъ координатъ будетъ:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{83}$$

Послѣ деформаціи этотъ шаръ обращается въ эллипсоидъ, оси котораго совпадаютъ съ подвижными осями координатъ; уравненіе его должно поэтому имѣть видъ:

$$\frac{\xi'^2}{E_1^2} + \frac{\eta'^2}{E_2^2} + \frac{\zeta'^2}{E_3^2} = 1. \tag{84}$$

Для того, чтобы уравненіе (83) могло обратиться въ (84), между координатами ξ', η', ζ' и ξ, η, ζ должны существовать линейныя зависимости и притомъ слѣдующаго вида:

$$\begin{aligned} \xi' &= E_1\,\xi, \\ \eta' &= E_2\,\eta, \\ \zeta' &= E_3\,\zeta. \end{aligned} \tag{85}$$

Дѣйствительно, такъ какъ оси эллипсоида совпадаютъ съ осями координатъ, то точки шара, находившіяся до деформаціи на одной изъ осей координатъ, могли перемѣститься лишь вдоль этой оси: въ противномъ случаѣ вся система получила-бы вращеніе. Поэтому необходимо, чтобы для точекъ, для которыхъ напр. η и ζ равны нулю, послѣ деформаціи были η' и ζ' равны нулю; т. е. выраженія для η' и ζ' не должны содержать координаты ξ; точно также выраженія для ζ' и ξ' не должны содержать координаты η, а выраженія для ξ' и η' — координаты ζ.

При деформаціи, выраженной формулами (85), точки, лежавшія въ координатныхъ плоскостяхъ $(\eta\,\zeta)$, $(\zeta\,\xi)$, $(\xi\,\eta)$, въ нихъ и остаются; точки, лежавшія въ плоскостяхъ, параллельныхъ координатнымъ, и послѣ деформаціи образуютъ плоскости, параллельныя тѣмъ-же координатнымъ плоскостямъ. Всѣ плоскости, параллельныя между собою, поворачиваются на одинъ и тотъ-же уголъ, такъ какъ въ однородно-измѣняемой системѣ онѣ и послѣ деформаціи должны оставаться параллельными между собою. Всякія двѣ плоскости, одинаково наклоненныя къ координатной, поворачиваются въ противуположныя стороны на одинаковый уголъ.

Эллипсоидъ (84) мы будемъ называть *эллипсоидомъ деформаціи*, а оси его *главными осями деформаціи;* удлиненія, происшедшія по направленіямъ этихъ осей, *главными удлиненіями*. Величины этихъ удлиненій, отнесенныя къ единицѣ длины, суть очевидно $E_1 - 1$, $E_2 - 1$, $E_3 - 1$. Помощью нихъ можетъ быть опредѣлено удлиненіе, происшедшее по какому-нибудь направленію, такъ какъ, зная первоначальную длину какого-нибудь вектора, проведеннаго изъ центра шара (83), мы можемъ по формуламъ (85) опредѣлить его измѣненную длину. Всякая прямая системы, геометрически равная выбранному нами вектору, получитъ то-же самое удлиненіе, какъ это видно изъ того, что въ однородно-измѣняемой системѣ параллелограммъ и послѣ деформаціи остается параллелограммомъ.

19. Вычисленіе элементовъ деформаціи по коэффиціентамъ уравненій движенія.

Вопросъ о деформаціи однородно-измѣняемой системы можно счи-

тать рѣшеннымъ, если по даннымъ коэффиціентамъ уравненій (80) будутъ опредѣлены величины E_1, E_2, E_3 и направленія осей эллипсоида (84) *до* деформаціи и *послѣ* нея по отношенію къ неподвижнымъ осямъ координатъ. Чтобы сдѣлать это опредѣленіе, подставимъ въ уравненія (82) выраженія (85). Введя потомъ сюда при помощи зависимостей (81) координаты a, b, c, получимъ:

$$\begin{aligned}
X = &(\alpha_1\alpha_1'E_1 + \beta_1\beta_1'E_2 + \gamma_1\gamma_1'E_3)a \\
&+ (\alpha_2\alpha_1'E_1 + \beta_2\beta_1'E_2 + \gamma_2\gamma_1'E_3)b \\
&+ (\alpha_3\alpha_1'E_1 + \beta_3\beta_1'E_2 + \gamma_3\gamma_1'E_3)c, \\
Y = &(\alpha_1\alpha_2'E_1 + \beta_1\beta_2'E_2 + \gamma_1\gamma_2'E_3)a \\
&+ (\alpha_2\alpha_2'E_1 + \beta_2\beta_2'E_2 + \gamma_2\gamma_2'E_3)b \\
&+ (\alpha_3\alpha_2'E_1 + \beta_3\beta_2'E_2 + \gamma_3\gamma_2'E_3)c, \\
Z = &(\alpha_1\alpha_3'E_1 + \beta_1\beta_3'E_2 + \gamma_1\gamma_3'E_3)a \\
&+ (\alpha_2\alpha_3'E_1 + \beta_2\beta_3'E_2 + \gamma_2\gamma_3'E_3)b \\
&+ (\alpha_3\alpha_3'E_1 + \beta_3\beta_3'E_2 + \gamma_3\gamma_3'E_3)c.
\end{aligned} \tag{86}$$

Эти уравненія содержатъ 21 неизвѣстную: E_1, E_2, E_3 и 18 косинусовъ. Для ихъ опредѣленія имѣются слѣдующія 21 зависимость:

1) *девять* зависимостей, выражающихъ тожественность формулъ (86) съ формулами (81):

$$\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_1'E_1 + \beta_1\beta_1'E_2 + \gamma_1\gamma_1'E_3 &= A_1, \\
\alpha_2\alpha_1'E_1 + \beta_2\beta_1'E_2 + \gamma_2\gamma_1'E_3 &= B_1, \\
\alpha_3\alpha_1'E_1 + \beta_3\beta_1'E_2 + \gamma_3\gamma_1'E_3 &= C_1, \\
\alpha_1\alpha_2'E_1 + \beta_1\beta_2'E_2 + \gamma_1\gamma_2'E_3 &= A_2, \\
\alpha_2\alpha_2'E_1 + \beta_2\beta_2'E_2 + \gamma_2\gamma_2'E_3 &= B_2, \\
\alpha_3\alpha_2'E_1 + \beta_3\beta_2'E_2 + \gamma_3\gamma_2'E_3 &= C_2, \\
\alpha_1\alpha_3'E_1 + \beta_1\beta_3'E_2 + \gamma_1\gamma_3'E_3 &= A_3, \\
\alpha_2\alpha_3'E_1 + \beta_2\beta_3'E_2 + \gamma_2\gamma_3'E_3 &= B_3, \\
\alpha_3\alpha_3'E_1 + \beta_3\beta_3'E_2 + \gamma_3\gamma_3'E_3 &= C_3;
\end{aligned} \tag{87}$$

2) *шесть* зависимостей между косинусами:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\
\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, \\
\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1,
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}(88)\qquad &\alpha_1'^2+\beta_1'^2+\gamma_1'^2=1\,,\\ &\alpha_2'^2+\beta_2'^2+\gamma_2'^2=1\,,\\ &\alpha_3'^2+\beta_3'^2+\gamma_3'^2=1\,;\end{aligned}$$

3) *шесть* условій перпендикулярности:

$$\begin{aligned}(89)\qquad &\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0\,,\\ &\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0\,,\\ &\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0\,,\\ &\alpha_2'\alpha_3'+\beta_2'\beta_3'+\gamma_2'\gamma_3'=0\,,\\ &\alpha_3'\alpha_1'+\beta_3'\beta_1'+\gamma_3'\gamma_1'=0\,,\\ &\alpha_1'\alpha_2'+\beta_1'\beta_2'+\gamma_1'\gamma_2'=0\,.\end{aligned}$$

Опредѣленіе 21 неизвѣстной можетъ быть на самомъ дѣлѣ выполнено слѣдующимъ образомъ. Сначала постараемся исключить всѣ косинусы; для этого умножимъ первое изъ уравненій (87) на α_1', четвертое на α_2', седьмое на α_3' и сложимъ; на основаніи зависимостей (88) и (89) получимъ тогда:

$$(90)\qquad \alpha_1E_1=A_1\alpha_1'+A_2\alpha_2'+A_3\alpha_3'\,,$$

и такимъ-же образомъ найдемъ еще:

$$\begin{aligned}(91)\qquad &\alpha_2E_1=B_1\alpha_1'+B_2\alpha_2'+B_3\alpha_3'\,,\\ &\alpha_3E_1=C_1\alpha_1'+C_2\alpha_2'+C_3\alpha_3'\,.\end{aligned}$$

Подобнымъ-же образомъ можно составить слѣдующія зависимости:

$$\begin{aligned}(92)\qquad &\alpha_1'E_1=A_1\alpha_1+B_1\alpha_2+C_1\alpha_3\,,\\ &\alpha_2'E_1=A_2\alpha_1+B_2\alpha_2+C_2\alpha_3\,,\\ &\alpha_3'E_1=A_3\alpha_1+B_3\alpha_2+C_3\alpha_3\,.\end{aligned}$$

Умножая уравненія (92) соотвѣтственно на A_1, A_2, A_3, складывая результаты и принимая во вниманіе уравненіе (90), получимъ:

$$\alpha_1E_1^2=A_1(A_1\alpha_1+B_1\alpha_2+C_1\alpha_3)+A_2(A_2\alpha_1+B_2\alpha_2+C_2\alpha_3)\\ +A_3(A_3\alpha_1+B_3\alpha_2+C_3\alpha_3)$$

и подобнымъ-же образомъ еще два уравненія:

$$\alpha_2 E_1{}^2 = B_1(A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3) + B_2(A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3) + B_3(A_3\alpha_1 + B_3\alpha_2 + C_3\alpha_3)\,,$$
$$\alpha_3 E_1{}^2 = C_1(A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3) + C_2(A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3) + C_3(A_3\alpha_1 + B_3\alpha_2 + C_3\alpha_3)\,.$$

Полагая

$$\begin{aligned} A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_3{}^2 &= L_{11}\,, \\ B_1{}^2 + B_2{}^2 + B_3{}^2 &= L_{22}\,, \\ C_1{}^2 + C_2{}^2 + C_3{}^2 &= L_{33}\,, \\ B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 &= L_{23}\,, \\ C_1A_1 + C_2A_2 + C_3A_3 &= L_{31}\,, \\ A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 &= L_{12}\,, \end{aligned} \tag{93}$$

мы можемъ предыдущія уравненія такъ представить:

$$\begin{aligned} (L_{11} - E_1{}^2)\alpha_1 + L_{12}\alpha_2 + L_{31}\alpha_3 &= 0\,, \\ L_{12}\alpha_1 + (L_{22} - E_1{}^2)\alpha_2 + L_{23}\alpha_3 &= 0\,, \\ L_{31}\alpha_1 + L_{23}\alpha_2 + (L_{33} - E_1{}^2)\alpha_3 &= 0\,. \end{aligned} \tag{94}$$

Такъ какъ α_1, α_2, α_3 не могутъ быть одновременно равны нулю, то необходимо:

$$\begin{vmatrix} L_{11} - E_1{}^2, & L_{12}, & L_{31} \\ L_{12}, & L_{22} - E_1{}^2, & L_{23} \\ L_{31}, & L_{23}, & L_{33} - E_1{}^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{95}$$

Это уравненіе послужитъ для опредѣленія E_1. Составляя подобнымъ-же образомъ уравненія для опредѣленія E_2 и E_3, найдемъ, что $E_2{}^2$ и $E_3{}^2$ будутъ удовлетворять тому-же самому кубическому уравненію (95); слѣдовательно корни этого уравненія опредѣляютъ собою квадраты всѣхъ трехъ главныхъ удлиненій. Отсюда уже прямо можно заключить, что всѣ корни этого уравненія будутъ дѣйствительные, хотя впрочемъ это видно и изъ того, что опредѣлитель (95) симметрическій. Кромѣ того, опредѣляя коэффиціенты при различныхъ степеняхъ неизвѣстной $E_1{}^2$, легко видѣть, что уравненіе не можетъ удовлетворяться отрицательными значеніями $E_1{}^2$. Слѣдовательно всѣ корни положительные. Извлекая квадратные корни изъ найденныхъ выраженій для $E_1{}^2$, $E_2{}^2$,

E_3^2, мы должны удержать положительныя ихъ значенія, такъ какъ по самому смыслу E_1, E_2, E_3 положительныя.

Найдя такимъ образомъ главныя удлиненія, можно воспользоваться уравненіями (94) для опредѣленія α_1, α_2, α_3, присоединивъ къ этимъ уравненіямъ первое изъ уравненій (88).

Для опредѣленія остальныхъ косинусовъ β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 послужатъ такія-же уравненія (94), т. е. съ тѣми-же коэффиціентами, только вмѣсто E_1 нужно будетъ подставить E_2 и E_3. Чтобы получить выраженія для этихъ косинусовъ въ симметричномъ видѣ, можно поступить по способу, находящемуся между прочимъ у Hesse*).

Когда α_1, β_1, ... γ_3 найдены, то уравненія (92) и еще шесть подобныхъ имъ уравненій послужатъ для опредѣленія α_1', β_1', ... γ_3'.

Опредѣленіе главныхъ удлиненій и ихъ направленій можетъ быть также сдѣлано путемъ слѣдующихъ соображеній, которыя впрочемъ на дѣлѣ сводятся къ тѣмъ-же уравненіямъ. Рѣшимъ (80) относительно a, b, c. Для этихъ величинъ мы получимъ линейныя выраженія

$$a = F_1X + G_1Y + H_1Z\,,$$
$$b = F_2X + G_2Y + H_2Z\,,$$
$$c = F_3X + G_3Y + H_3Z\,.$$

Подставляя ихъ въ уравненіе шара

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1\,,$$

мы получимъ уравненіе поверхности эллипсоида деформаціи, отнесенное къ неподвижнымъ координатнымъ осямъ:

$$(F_1X + G_1Y + H_1Z)^2 + (F_2X + G_2Y + H_2Z)^2 + (F_3X + G_3Y + H_3Z)^2 = 1.$$

Задача сводится такимъ образомъ къ отысканію величинъ и направленій осей этого эллипсоида, что можетъ быть сдѣлано извѣстными пріемами аналитической геометріи.

20. Чистая деформація.

Мы уже видѣли, что чистая деформація выражается формулами (85), если оси деформаціи совпадаютъ съ осями координатъ. Посмо-

---

*) Hesse, Vorlesungen über anal. Geometrie des Raumes. 1869. Стр. 244—247,

тримъ теперь, какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты общихъ уравненій движенія однородно-измѣняемой системы, если движеніе ея состоитъ изъ чистой деформаціи, происходящей *по какимъ-нибудь* взаимно-перпендикулярнымъ направленіямъ. Такъ какъ въ случаѣ чистой деформаціи оси деформаціи сохраняютъ то направленіе, какое онѣ имѣли въ начальномъ положеніи системы, то теперь

$$\begin{aligned} \alpha_1' = \alpha_1 , \quad \beta_1' = \beta_1 , \quad \gamma_1' = \gamma_1 , \\ \alpha_2' = \alpha_2 , \quad \beta_2' = \beta_2 , \quad \gamma_2' = \gamma_2 , \\ \alpha_3' = \alpha_3 , \quad \beta_3' = \beta_3 , \quad \gamma_3' = \gamma_3 . \end{aligned} \tag{96}$$

Вслѣдствіе этого теперь, какъ показываютъ формулы (87),

$$B_3 = C_2 , \quad C_1 = A_3 , \quad A_2 = B_1 .$$

Это нетолько необходимыя, но и *достаточныя условія* существованія чистой деформаціи. Чтобы это доказать, нужно показать, что равенства (97) влекутъ за собою равенства (96)*). Въ § 19 было замѣчено, что косинусы α_1', β_1' .... γ_3' могутъ быть найдены по формуламъ (92) и имъ подобнымъ, послѣ того какъ вычислены E_1, E_2, E_3, α_1, β_1, ... γ_3. Но тѣ-же самые косинусы можно опредѣлить и непосредственно преобразованіями, подобными тѣмъ, которыя привели къ уравненіямъ (94). Умножая для этого (90) и (91) соотвѣтственно на A_1, B_1, C_1, складывая результаты и принимая во вниманіе уравненія (92), получимъ:

$$\begin{aligned} (L_{11}' - E_1^2)\alpha_1' + L_{12}'\alpha_2' + L_{31}'\alpha_3' = 0 , \\ L_{12}'\alpha_1' + (L_{22}' - E_1^2)\alpha_2' + L_{23}'\alpha_3' = 0 , \\ L_{31}'\alpha_1' + L_{23}'\alpha_2' + (L_{33}' - E_1^2)\alpha_3' = 0 , \end{aligned}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} L_{11}' = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 , \\ L_{22}' = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 , \\ L_{33}' = A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 , \end{aligned}$$

---

*) Въ различныхъ руководствахъ это обыкновенно или принимается само собою понятнымъ, или доказывается тѣмъ соображеніемъ, что теперь уравненія движенія системы содержатъ шесть различныхъ коэффиціентовъ, и что какъ-бы ихъ ни задавать, по нимъ могутъ быть опредѣлены шесть параметровъ чистой деформаціи: три удлиненія и три угла, опредѣляющіе направленія послѣднихъ (Nat. Phil., Thomson and Tait). Такія соображенія нельзя считать достаточными, и мы считаемъ поэтому непосредственное доказательство необходимымъ.

$$L_{23}' = A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3\,,$$
$$L_{31}' = A_3A_1 + B_3B_1 + C_3C_1\,,$$
$$L_{12}' = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\,.$$

Предполагая существованіе равенствъ (97), мы увидимъ, что

$$L_{11}' = L_{11}\,,\quad L_{22}' = L_{22}\,,\quad L_{33}' = L_{33}\,,$$
$$L_{23}' = L_{23}\,,\quad L_{31}' = L_{31}\,,\quad L_{12}' = L_{12}\,.$$

Такимъ образомъ для опредѣленія обѣихъ системъ косинусовъ α_1', β_1', ... γ_3' и α_1, β_1, ... γ_3 теперь имѣются одни и тѣ-же линейныя уравненія. Слѣдовательно координатныя оси при деформаціи вращенія не получаютъ, т. е. деформація чистая.

21. Удлиненія и отклоненія векторовъ однородно-измѣняемой системы при чистой деформаціи послѣдней.

Разсматривая чистую деформацію, мы видимъ что три прямыя линіи въ системѣ—главныя оси эллипсоида деформаціи—сохраняютъ свое направленіе. По основному свойству однородно-измѣняемой системы то же самое имѣетъ мѣсто и относительно всякой прямой, параллельной одной изъ этихъ осей. Разсмотримъ теперь удлиненіе вектора, взятаго по какому-нибудь произвольному направленію, и происходящее при этомъ отклоненіе его отъ первоначальнаго направленія *(девіацію)*.

Пусть будетъ $E-1$ удлиненіе этого вектора, проведеннаго изъ центра эллипсоида деформаціи къ точкѣ (a, b, c). Согласно опредѣленію, данному удлиненію,

$$E - 1 = \frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} - \sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

или, на основаніи формулъ (80),

$$E-1=$$
$$\frac{\sqrt{(A_1a+B_1b+C_1c)^2+(A_2a+B_2b+C_2c)^2+(A_3a+B_3b+C_3c)^2} - \sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Отсюда мы видимъ, что векторы, получившіе *одинаковое удлиненіе*, образуютъ *конусъ втораго порядка.* Когда эллипсоидъ деформаціи

найденъ, удлинение $E - 1$ легко можетъ быть выражено черезъ главныя удлиненія и найдено положеніе *конуса равныхъ удлиненій*. Относя положеніе даннаго вектора къ осямъ ξ, η, ζ, будемъ имѣть

$$E - 1 = \frac{\sqrt{E_1^2\xi^2 + E_2^2\eta^2 + E_3^2\zeta^2} - \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}};$$

а конусъ равныхъ удлиненій будетъ имѣть своимъ уравненіемъ

$$(E_1^2 - E^2)\xi^2 + (E_2^2 - E^2)\eta^2 + (E_3^2 - E^2)\zeta^2 = 0.$$

Ось его всегда совпадаетъ съ одною изъ главныхъ осей деформаціи. Если

$$E_1 > E_2 > E_3 \quad \text{и} \quad E_2 > E > E_3,$$

то этотъ конусъ обхватываетъ наименьшую ось эллипсоида деформаціи; если

$$E = E_2,$$

то этотъ конусъ превращается въ двѣ плоскости, проходящія черезъ среднюю ось эллипсоида и одинаково наклоненныя къ наибольшей оси эллипсоида. Эти плоскости и другія, имъ параллельныя, суть очевидно плоскости круговыхъ сѣченій эллипсоида деформаціи. Такъ какъ въ этихъ плоскостяхъ происходятъ одинаковыя удлиненія по всѣмъ направленіямъ, то всякая фигура, начерченная въ такой плоскости, остается подобною самой себѣ. Если наконецъ

$$E_1 > E > E_2,$$

то конусъ равныхъ удлиненій обхватываетъ наибольшую ось эллипсоида.

Векторы, не получающіе никакого удлиненія, образуютъ конусъ

$$(E_1^2 - 1)\xi^2 + (E_2 - 1)\eta^2 + (E_3 - 1)\zeta^2 = 0.$$

Этотъ конусъ можетъ быть очевидно и мнимымъ.

Для опредѣленія девіаціи какого-нибудь вектора, означимъ черезъ ρ его первоначальную длину, черезъ l, m, n углы, образуемые имъ съ главными осями деформаціи *до* деформаціи, черезъ l', m', n' — тѣ-же углы *послѣ* деформаціи и замѣтимъ слѣдующія формулы:

(98) $$\cos l = \frac{\xi}{\rho}, \quad \cos m = \frac{\eta}{\rho}, \quad \cos n = \frac{\zeta}{\rho},$$

$$\cos l' = \frac{E_1\xi}{E\rho} = \frac{E_1\xi}{\sqrt{E_1^2\xi^2 + E_2^2\eta^2 + E_3^2\zeta^2}},$$

(99) $$\cos m' = \frac{E_2\eta}{\sqrt{E_1^2\xi^2 + E_2^2\eta^2 + E_3^2\zeta^2}},$$

$$\cos n' = \frac{E_3\zeta}{\sqrt{E_1^2\xi^2 + E_2^2\eta^2 + E_3^2\zeta^2}},$$

и для угла отклоненія δ:

$$\cos \delta = \frac{E_1\xi^2 + E_2\eta^2 + E_3\zeta^2}{\sqrt{E_1^2\xi^2 + E_2^2\eta^2 + E_3^2\zeta^2} \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

Отсюда мы видимъ, что векторы, получающіе *одинаковое отклоненіе*, образуютъ *конусъ четвертаго порядка.*

Формулы (98) и (99) даютъ также выраженіе для угла между двумя данными векторами ρ_1 и ρ_2 послѣ деформаціи:

$$\cos(\rho_1, \rho_2) = \frac{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2}{\rho_1\rho_2},$$

$$\cos(\rho_1', \rho_2') = \frac{E_1^2\xi_1\xi_2 + E_2^2\eta_1\eta_2 + E_3^2\zeta_1\zeta_2}{\sqrt{(E_1^2\xi_1^2 + E_2^2\eta_1^2 + E_3^2\zeta_1^2)\ (E_1^2\xi_2^2 + E_2^2\eta_2^2 + E_3^2\zeta_2^2)}}.$$

По этой формулѣ мы можемъ опредѣлить, въ какой параллелограммъ обратится послѣ деформаціи принадлежащій системѣ прямоугольникъ.

Для опредѣленія отклоненія плоскости, нужно только принять во вниманіе, что если

$$\cos L \,.\, \xi + \cos M \,.\, \eta + \cos N \,.\, \zeta = 0$$

есть уравненіе плоскости до деформаціи, то послѣ деформаціи оно превращается въ слѣдующее:

$$\frac{\cos L}{E_1}\xi' + \frac{\cos M}{E_1}\eta' + \frac{\cos N}{E_1}\zeta' = 0.$$

Точно также для угла Θ между двумя плоскостями, для котораго до деформаціи было

$$\cos\Theta = \cos L_1 \cos L_2 + \cos M_1 \cos M_2 + \cos N_1 \cos N_2 ,$$

послѣ деформаціи будетъ

$$\cos\Theta' = \frac{\frac{\cos L_1 \cos L_2}{E_1^2} + \frac{\cos M_1 \cos M_2}{E_2^2} + \frac{\cos N_1 \cos N_2}{E_3^2}}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2 L_1}{E_1^2} + \frac{\cos^2 M_1}{E_2^2} + \frac{\cos^2 N_1}{E_3^2}\right)\left(\frac{\cos^2 L_2}{E_1^2} + \frac{\cos^2 M_2}{E_2^2} + \frac{\cos^2 N_2}{E_3^2}\right)}} .$$

Эта формула можетъ служить для опредѣленія параллелепипеда, въ который превратится послѣ деформаціи параллелепипедъ первоначально прямоугольный.

22. Кинематическіе элементы, опредѣляющіе въ общемъ случаѣ перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы.

Все сказанное выше относительно деформаціи показываетъ, что перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы опредѣляется въ общемъ случаѣ слѣдующими кинематическими элементами:

1) *раздвиганіемъ*, для опредѣленія котораго по величинѣ и по направленію требуется знаніе *трехъ параметровъ;*

2) *однородною чистою деформаціею;* для опредѣленія осей ея и величинъ удлиненій нужно знать *шесть параметровъ;*

3) *перемѣщеніемъ, свойственнымъ твердому тѣлу;* это перемѣщеніе также опредѣляется *шестью параметрами.*

Такимъ образомъ, сообразно съ числомъ коэффиціентовъ въ уравненіяхъ движенія коллинеарно-измѣняемой системы, мы имѣемъ всего 15 кинематическихъ элементовъ, опредѣляющихъ ея перемѣщеніе.

Мы разсматриваемъ теперь конечныя перемѣщенія; извѣстно, что въ этомъ случаѣ, вообще говоря, результатъ перемѣщенія зависитъ отъ того порядка, въ которомъ происходятъ отдѣльныя слагаемыя перемѣщенія. Намъ предстоитъ поэтому разсмотрѣть, въ какихъ случаяхъ, при разложеніи какого-нибудь движенія коллинеарно-измѣняемой системы на составные кинематическіе элементы, нужно принимать во вниманіе порядокъ отдѣльныхъ перемѣщеній, и чѣмъ выражается вліяніе измѣненія этого порядка на результатъ перемѣщенія. Для выясненія этого вопроса будетъ полезно разсмотрѣть предварительно нѣсколько частныхъ слу-

чаевъ перемѣщенія. При этомъ мы воспользуемся общими формулами, приведенными въ §§ 18, 19 и 20.

23. Расширеніе по произвольно заданному направленію.

Пусть движеніе однородно-измѣняемой системы состоитъ изъ расширенія, происходящаго по направленію, опредѣляемому косинусами l, m, n, причемъ всѣ точки плоскости, проходящей черезъ начало координатъ и перпендикулярной къ направленію расширенія, остаются неподвижными. Пусть будетъ

$$l\xi + m\eta + n\zeta = \delta_0 \tag{100}$$

уравненіе плоскости, ей параллельной, и E удлиненіе векторовъ, перпендикулярныхъ къ этой плоскости. Плоскость (100) послѣ деформаціи переходитъ въ положеніе, опредѣляемое уравненіемъ

$$lx + my + nz = \delta ,$$

причемъ

$$\delta = E . \delta_0 .$$

На основаніи этого можно написать:

$$lx + my + nz = E(l\xi + m\eta + n\zeta) ; \tag{101}$$

кромѣ того

$$x = lp + \xi , \quad y = mp + \eta , \quad z = np + \zeta . \tag{102}$$

Для опредѣленія p подставимъ эти выраженія въ уравненіе (101); это дастъ

$$p = (E - 1)(l\xi + m\eta + n\zeta) .$$

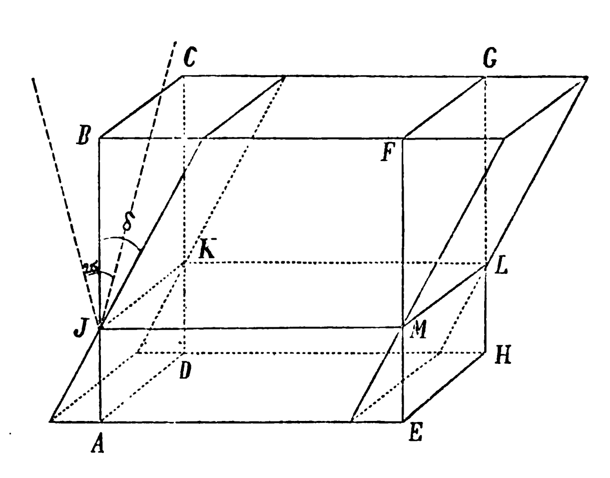
Поэтому уравненія движенія (102) окончательно примутъ слѣдующій видъ:

$$x = [l^2(E - 1) + 1]\xi + lm(E - 1)\eta + nl(E - 1)\zeta ,$$
$$y = lm(E - 1)\xi + [m^2(E - 1) + 1]\eta + mn(E - 1)\zeta ,$$
$$z = nl(E - 1)\xi + mn(E - 1)\eta + [n^2(E - 1) + 1]\zeta .$$

24. О сдвиганіи.

Извѣстно, что при деформаціи однородно-измѣняемой системы прямоугольный параллелепипедъ превращается въ косой; деформацію, состоящую въ скашиваніи граней, мы будемъ называть *сдвиганіемъ*. Это

сдвиганіе условимся называть простымъ, если двѣ противуположныхъ грани, поворачиваясь, остаются прямоугольными *(ABCD* и *EFGH)*, другія двѣ грани *(ADHE* и *BCGF)* тоже остаются прямоугольными, скользя въ своихъ плоскостяхъ, и остальная лишь пара граней (*ABFE* и *DCGH)* превращается въ косые параллелограммы. Одна плоскость, *JKLM*, параллельная грани *BCFG* параллелепипеда, остается совсѣмъ неподвижною; мы будемъ ее называть *основною плоскостью* направленіе скольженія плоскости *BCGF* (или, смотря по условію, плоскости *ADHE*) — *направленіемъ сдвиганія;* плоскость, параллельную гранямъ *ABFE* или *DCGH*,—*плоскостью сдвиганія*, а прямую, къ ней перпендикулярную, — *осью сдвиганія.*



Величину сдвиганія мы будемъ опредѣлять отношеніемъ перемѣщенія какой-либо точки къ разстоянію ея отъ основной плоскости,—отношеніемъ для всѣхъ точекъ одинаковымъ. Величину сдвиганія можно также опредѣлить: 1) какъ тангенсъ угла δ, на который поворачивается во время сдвиганія плоскость *ABCD*, перпендикулярная къ основной плоскости и къ плоскости сдвиганія; 2) какъ удвоенный тангенсъ угла σ, гдѣ 2σ есть уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника, основаніе котораго равно перемѣщенію точки, а высота равна разстоянію этой точки отъ основной плоскости.

Чтобы составить уравненія движенія однородно-измѣняемой системы, когда оно состоитъ изъ простаго сдвиганія, напишемъ сначала эти уравненія для простѣйшаго случая, когда основною плоскостью служитъ одна изъ координатныхъ плоскостей, напр. (xy), а само сдвиганіе происходитъ по направленію координатной оси, напр. оси y. Означая черезъ

a', b', c' начальныя координаты какой-либо точки, а черезъ x', y', z' ея координаты послѣ перемѣщенія, будемъ очевидно имѣть:

$$x' = a',$$
(103) $$y' = b' + tg\delta\, c' = b' + 2tg\sigma\, c',$$
$$z' = c'.$$

Перейдемъ теперь къ болѣе общимъ формуламъ, когда основною плоскостью служитъ какая-нибудь плоскость, проходящая черезъ начало координатъ:

$$PX + QY + RZ = 0,$$

гдѣ P, Q, R суть косинусы угловъ нормали плоскости съ осями координатъ, и когда направленіе сдвиганія опредѣляется косинусами S, T, U. Для этого нужно только произвести преобразованіе направленія координатныхъ осей въ формулахъ (103). Пусть будутъ (x, y, z) новыя координатныя оси, произвольно выбранныя, и (α_1, β_1, γ_1), (α_2, β_2, γ_2), (α_3, β_3, γ_3) косинусы угловъ, которые съ ними составляютъ оси (x', y', z'). Тогда

$$\alpha_2 = S,\ \beta_2 = T,\ \gamma_2 = U,$$
$$\alpha_3 = P,\ \beta_3 = Q,\ \gamma_3 = R,$$

и можно написать:

$$a' = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c,$$
$$b' = Sa + Tb + Uc,$$
$$c' = Pa + Qb + Rc,$$
$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$
$$y' = Sx + Ty + Uz,$$
$$z' = Px + Qy + Rz.$$

Исключая изъ этихъ уравненій координаты a', b', c', x', y', z' при помощи уравненій (103), и получимъ искомыя формулы:

$$x = a + 2\,S\,(Pa + Qb + Rc)\,tg\sigma,$$
(104) $$y = b + 2\,T\,(Pa + Qb + Rc)\,tg\sigma,$$
$$z = c + 2\,U\,(Pa + Qb + Rc)\,tg\sigma.$$

Сравнивая эти формулы съ общими уравненіями движенія однородно-измѣняемой системы, когда у нея отнято поступательное перемѣщеніе, мы можемъ получить общія условія для того, чтобы эти послѣднія уравненія

представляли собою простое сдвиганіе въ какой-нибудь плоскости и по какому-нибудь направленію. Прежде всего опредѣлимъ число этихъ условій. Сдвиганіе вполнѣ опредѣляется четырьмя величинами, ибо семь величинъ P, Q, R, S, T, U, σ связаны тремя условіями:

$$P^2 + Q^2 + R^2 = 1,$$
$$S^2 + T^2 + U^2 = 1,$$
$$PS + QT + RU = 0.$$

Эти четыре величины суть очевидно: два угла, оріентирующіе плоскость сдвиганія, одинъ уголъ, опредѣляющій направленіе сдвиганія въ этой плоскости, и наканецъ величина самаго сдвиганія. Такимъ образомъ между девятью величинами A_1, B_1, ... C_3 должны существовать ***пять условій***. Чтобы ихъ написать, сдѣлаемъ сравненіе коэффиціентовъ A_1, B_1, ... C_3 съ коэффиціентами въ формулахъ (104):

$$A_1 = 1 + 2\,PS\,.\,tg\sigma,\quad B_1 = 2\,QS\,.\,tg\sigma,\quad C_1 = 2\,RS\,.\,tg\sigma,$$
$$A_2 = 2\,PT\,.\,tg\sigma,\quad B_2 = 1 + 2\,QT\,.\,tg\sigma,\quad C_2 = 2\,RT\,.\,tg\sigma,\qquad (105)$$
$$A_3 = 2\,PU\,.\,tg\sigma,\quad B_3 = 2\,QU\,.\,tg\sigma,\quad C_3 = 1 + 2\,RU.tg\sigma.$$

Отсюда легко получить зависимости:

$$A_1 + B_2 + C_3 = 3,$$
$$(A_1 - 1) : B_1 : C_1 = A_2 : (B_2 - 1) : C_2 = A_3 : B_3 : (C_3 - 1),\qquad (106)$$

которыя содержатъ пять существенно различныхъ между собою условій. Если даны уравненія движенія съ коэффиціентами, удовлетворяющими условіямъ (105), то легко могутъ быть опредѣлены величина и направленіе сдвиганія. Формулы (106) даютъ:

$$4\,tg^2\sigma = (A_1 - 1)^2 + B_1^2 + C_1^2 + A_2^2 + (B_2 - 1)^2 + C_2^2 + A_3^2 + B_3^2 + (C_3 - 1)^2,\qquad (107)$$

$$P^2 = \frac{(A_1 - 1)^2 + A_2^2 + A_3^2}{4\,tg^2\sigma},$$
$$Q^2 = \frac{B_1^2 + (B_2 - 1)^2 + B_3^2}{4\,tg^2\sigma},\qquad (108)$$
$$R^2 = \frac{C_1^2 + C_2^2 + (C_3 - 1)^2}{4\,tg^2\sigma},$$

$$S^2 = \frac{(A_1 - 1)^2 + B_1^2 + C_1^2}{4\, tg^2 \sigma},$$

(108) $$T^2 = \frac{A_2^2 + (B_2 - 1)^2 + C_2^2}{4\, tg^2 \sigma},$$

$$U^2 = \frac{A_3^2 + B_3^2 + (C_3 - 1)^2}{4\, tg^2 \sigma}.$$

25. Зависимость между сдвиганіемъ, удлиненіями и вращеніями.

Формулы (104) и (97) показываютъ, что сдвиганіе не можетъ быть замѣнено чистой деформаціей. Посмотримъ, какимъ образомъ оно связано съ удлиненіями и вращеніями. Для этого приложимъ къ формуламъ (103) общій пріемъ § 19 для отысканія главныхъ осей деформаціи и величинъ удлиненій [1]. Формулы (93) даютъ:

$$L_{11} = 1, \quad L_{22} = 1, \; L_{33} = 1 + 4\, tg^2 \sigma,$$
$$L_{23} = 2\, tg \sigma, \; L_{31} = 0, \; L_{12} = 0;$$

а кубическое уравненіе (95) принимаетъ видъ:

$$(1 - E^2)\,[1 - 2\,(1 + tg^2 \sigma)\, E^2 + E^4] = 0$$

и даетъ корни:

$$E_1^2 = 1, \; E_2^2 = \left(\frac{1 + sin\, \sigma}{cos\, \sigma}\right)^2, \; E_3^2 = \left(\frac{1 - sin\, \sigma}{cos\, \sigma}\right)^2.$$

А такъ какъ удлиненіе по самому смыслу всегда положительное, то мы находимъ окончательно:

$$E_1 = 1,$$
$$E_2 = \frac{1 + sin\, \sigma}{cos\, \sigma} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}\right) = cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right),$$

$$E_3 = \frac{1 - sin\, \sigma}{cos\, \sigma} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right) = cotg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}\right).$$

Отсюда мы видимъ между прочимъ, что *произведеніе удлиненій при простомъ сдвиганіи равно единицѣ.*

---

[1]) См. Бобылевъ. Гидростатика и теорія упругости. Геометрическое опредѣленіе, см. Thomson a. Tait, Nat. Philos.

Чтобы найти направленія осей деформаціи *до* и *послѣ* сдвиганія, воспользуемся формулами (94) и (92); онѣ даютъ:

$$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \gamma_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = 0,\ \beta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}\right),\ \gamma_2 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}\right),$$

$$\alpha_3 = 0,\ \beta_3 = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}\right),\ \gamma_3 = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}\right),$$

$$\alpha_1' = 1,\ \beta_1' = 0,\ \gamma_1' = 0,$$

$$\alpha_2' = 0,\ \beta_2' = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right),\ \gamma_2' = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right),$$

$$\alpha_3' = 0,\ \beta_3' = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right),\ \gamma_3' = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right).$$

Эти выраженія показываютъ, 1) что *при простомъ сдвиганіи деформація сопровождается вращеніемъ на уголъ*

$$\sigma = arctg\,\frac{K}{2},$$

гдѣ K величина сдвиганія, и 2) что *положенія каждой изъ осей деформаціи, лежащихъ въ плоскости сдвиганія, до и послѣ деформаціи образуютъ между собою углы, которые раздѣляются пополамъ биссектриссами угловъ между координатными осями.*

Простое сдвиганіе не можетъ дать такимъ образомъ чистой деформаціи. Она можетъ быть однако получена двумя равными сдвиганіями по направленіямъ взаимно-перпендикулярнымъ, такъ какъ такія сдвиганія дадутъ два равныхъ и прямо-противуположныхъ вращенія, если направленія этихъ сдвиганій будутъ выбраны надлежащимъ образомъ.

Перемѣщеніе однородно-измѣняемой системы опредѣляется, какъ мы видѣли, 12 кинематическими элементами: тремя поступательными перемѣщеніями, тремя вращеніями и тремя удлиненіями; опредѣленіе послѣднихъ требовало знанія шести величинъ. Вмѣсто нѣкоторыхъ изъ этихъ элементовъ могутъ быть введены сдвиганія, которыя, какъ мы видѣли, представляютъ тоже частный видъ перемѣщенія однородно-измѣняемой системы; но такое замѣненіе въ случаѣ *конечныхъ* (а не безконечно-ма-

лыхъ) *перемѣщеній*, вообще говоря, удобства не представляетъ; потому-что, вводя сдвиганія, пришлось бы указывать порядокъ, въ какомъ онѣ должны быть произведены. Отъ того порядка, въ которомъ производятся два послѣдовательныхъ конечныхъ перемѣщенія, зависитъ, вообще говоря, результатъ этого перемѣщенія. Эти вопросы будутъ ниже разсмотрѣны.

26. Вращеніе, сопряженное съ удлиненіемъ по направленію, перпендикулярному къ оси вращенія.

Сдѣлаемъ еще приложеніе общихъ формулъ (90) до (95) къ опредѣленію слѣдующаго перемѣщенія однородно-измѣняемой системы, которое намъ придется встрѣтить ниже:

$$\begin{aligned} x &= a - h_3 b + h_2 c, \\ y &= h_3 a + b - h_1 c, \\ z &= - h_2 a + h_1 b + c. \end{aligned} \tag{109}$$

Формулы (93) даютъ:

$$\begin{gathered} L_{11} = 1 + h_2^2 + h_3^2, \\ L_{22} = 1 + h_3^2 + h_1^2, \\ L_{33} = 1 + h_1^2 + h_2^2, \\ L_{23} = - h_2 h_3,\ L_{31} = - h_3 h_1,\ L_{12} = - h_1 h_2. \end{gathered}$$

Вслѣдствіе этого кубическое уравненіе (95) принимаетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} h_2^2 + h_3^2 - (E^2 - 1), & - h_1 h_2, & - h_3 h_1 \\ - h_1 h_2, & h_3^2 + h_1^2 - (E^2 - 1), & - h_2 h_3 \\ - h_3 h_1, & - h_2 h_3, & h_1^2 + h_2^2 - (E^2 - 1) \end{vmatrix} = 0$$

и приводится послѣ нѣсколькихъ преобразованій къ слѣдующему:

$$(E^2-1)^3-2(E^2-1)^2(h_1^2+h_2^2+h_3^2)+(E^2-1)(h_1^2+h_2^2+h_3^2)^2 = 0.$$

Такимъ образомъ для главныхъ удлиненій получаемъ:

$$\begin{gathered} E_1^2 = 1, \\ E_2^2 = E_3^2 = 1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2; \end{gathered} \tag{110}$$

откуда видно, что эллипсоидъ удлиненій будетъ сжатымъ эллипсоидомъ вращенія. Найдемъ направленіе его оси, опредѣляемое косинусами α_1, β_1, γ_1. Обращаясь для этого къ формуламъ (94), находимъ:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = h_1 : h_2 : h_3.$$

Поэтому

(111)
$$\alpha_1 = \pm \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}, \quad \beta_1 = \pm \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}},$$
$$\gamma_1 = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}.$$

Косинусы α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 остаются неопредѣленными, такъ какъ всѣ три уравненія (94), если въ нихъ вмѣсто E_1 подставить изъ (110) E_2 или E_3, дѣлаются тождественными; что можно было конечно предвидѣть изъ равенства главныхъ удлиненій E_2 и E_3.

Для опредѣленія вращенія главныхъ осей деформаціи, по формуламъ (92) и (111) имѣемъ:

$$\alpha_1' = \alpha_1, \ \beta_1' = \beta_1, \ \gamma_1' = \gamma_1.$$

Слѣдовательно ось эллипсоида вращенія своего направленія не мѣняетъ и вращеніе тѣла происходитъ около этой оси. Для опредѣленія угла φ этого вращенія, мы не можемъ непосредственно опредѣлить α_2', β_2', γ_2', α_3', β_3', γ_3', ибо α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, отъ которыхъ по формуламъ (90) и (91) предыдущіе косинусы зависятъ, остаются неопредѣленными; но въ данномъ случаѣ φ можетъ быть вычислено другимъ путемъ. Для этого замѣнимъ въ косинусахъ формулъ (90) и (91) значекъ 1 значкомъ 2 и вмѣсто E_1 подставимъ E_2; тогда по формуламъ (109):

$$E_2\,\alpha_2' = \alpha_2 - h_3\,\beta_2 + h_2\,\gamma_2,$$
$$E_2\,\beta_2' = h_3\,\alpha_2 + \beta_2 - h_1\,\gamma_2,$$
$$E_2\,\gamma_2' = -h_2\,\alpha_2 + h_1\,\beta_2 + \gamma_2.$$

Умножая эти уравненія соотвѣтственно на α_2, β_2, γ_2 и складывая, получимъ:

$$E_2 \cos\varphi = 1$$

или по формуламъ (110):

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}}.$$

Итакъ, заданное *перемѣщеніе* (109) *состоитъ изъ вращенія около оси, косинусы угловъ которой пропорціональны коэффиціентамъ*

h_1, h_2, h_3, *и изъ расширенія, однороднаго по всѣмъ направленіямъ, перпендикулярнымъ къ этой оси.*

27. О составномъ перемѣщеніи коллинеарно-измѣняемой системы. Общія формулы.

Два послѣдовательныхъ перемѣщенія коллинеарно-измѣняемой системы эквивалентны одному простому перемѣщенію этой системы. Рѣшимъ теперь нѣсколько вопросовъ относительно зависимости между этимъ эквивалентнымъ перемѣщеніемъ и двумя данными, а также относительно вліянія порядка, въ которомъ производятся слагаемыя перемѣщенія, на ихъ результатъ. Формулы, опредѣляющія эти два послѣдовательныя перемѣщенія, пусть будутъ слѣдующія:

$$x' = \frac{A_1'a + B_1'b + C_1'c + D_1'}{\alpha'a + \beta'b + \gamma'c + 1},$$

(112)
$$y' = \frac{A_2'a + B_2'b + C_2'c + D_2'}{\alpha'a + \beta'b + \gamma'c + 1},$$

$$z' = \frac{A_3'a + B_3'b + C_3'c + D_3'}{\alpha'a + \beta'b + \gamma'c + 1},$$

$$x = \frac{A_1''x' + B_1''y' + C_1''z' + D_1''}{\alpha''x' + \beta''y' + \gamma''z' + 1},$$

(113)
$$y = \frac{A_2''x' + B_2''y' + C_2''z' + D_2''}{\alpha''x' + \beta''y' + \gamma''z' + 1},$$

$$z = \frac{A_3''x' + B_3''y' + C_3''z' + D_3''}{\alpha''x' + \beta''y' + \gamma''z' + 1}.$$

Подставляя въ послѣднія уравненія выраженія для x', y', z' изъ формулъ (112), получимъ для составнаго перемѣщенія:

$$x = \frac{A_1a + B_1b + C_1c + D_1}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$

(114)
$$y = \frac{A_2a + B_2b + C_2c + D_2}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$

$$z = \frac{A_3a + B_3b + C_3c + D_3}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1}.$$

Если положить для сокращенія:

(115)
$$\alpha''D_1' + \beta''D_2' + \gamma''D_3' + 1 = p,$$

то коэффиціенты въ этихъ формулахъ представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{p}\left(A_1'A_1'' + A_2'B_1'' + A_3'C_1'' + \alpha'D_1''\right), \\
B_1 &= \frac{1}{p}\left(B_1'A_1'' + B_2'B_1'' + B_3'C_1'' + \beta'D_1''\right), \\
C_1 &= \frac{1}{p}\left(C_1'A_1'' + C_2'B_1'' + C_3'C_1'' + \gamma'D_1''\right), \\
D_1 &= \frac{1}{p}\left(D_1'A_1'' + D_2'B_1'' + D_3'C_1'' + D_1''\right), \\
A_2 &= \frac{1}{p}\left(A_1'A_2'' + A_2'B_2'' + A_3'C_2'' + \alpha'D_2''\right), \\
B_2 &= \frac{1}{p}\left(B_1'A_2'' + B_2'B_2'' + B_3'C_2'' + \beta'D_2''\right), \\
C_2 &= \frac{1}{p}\left(C_1'A_2'' + C_2'B_2'' + C_3'C_2'' + \gamma'D_2''\right), \\
D_2 &= \frac{1}{p}\left(D_1'A_2'' + D_2'B_2'' + D_3'C_2'' + D_2''\right), \\
A_3 &= \frac{1}{p}\left(A_1'A_3'' + A_2'B_3'' + A_3'C_3'' + \alpha'D_3''\right), \\
B_3 &= \frac{1}{p}\left(B_1'A_3'' + B_2'B_3'' + B_3'C_3'' + \beta'D_3''\right), \\
C_3 &= \frac{1}{p}\left(C_1'A_3'' + C_2'B_3'' + C_3'C_3'' + \gamma'D_3''\right), \\
D_3 &= \frac{1}{p}\left(D_1'A_3'' + D_2'B_3'' + D_3'C_3'' + D_3''\right),
\end{aligned}
\right\} \quad (116)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{p}\left(A_1'\alpha'' + A_2'\beta'' + A_3'\gamma'' + \alpha'\right), \\
\beta &= \frac{1}{p}\left(B_1'\alpha'' + B_2'\beta'' + B_3'\gamma'' + \beta'\right), \\
\gamma &= \frac{1}{p}\left(C_1'\alpha'' + C_2'\beta'' + C_3'\gamma'' + \gamma'\right).
\end{aligned}
\right\} \quad (117)
$$

Кромѣ этихъ формулъ, намъ будутъ нужны еще формулы для коэффиціентовъ уравненій

$$a = \frac{E_1x + F_1y + G_1z + H_1}{\lambda x + \mu y + \nu z + 1},$$

$$b = \frac{E_2x + F_2y + G_2z + H_2}{\lambda x + \mu y + \nu z + 1},$$

$$c = \frac{E_3x + F_3y + G_3z + H_3}{\lambda x + \mu y + \nu z + 1},$$

служащихъ для перехода отъ конечнаго положенія системы въ ея состав-

номъ перемѣщеніи къ начальному. Обращаясь для этого къ формуламъ (7), (8), (9), (10) и (11), подставляя въ нихъ выраженія $A_1, A_2, \ldots \gamma$ изъ формулъ (115), (116) и (117), пользуясь при этомъ извѣстнымъ правиломъ перемноженія опредѣлителей и полагая для сокращенія

$$\lambda' H_1'' + \mu' H_2'' + \nu' H_3'' + 1 = q\,, \tag{118}$$

получимъ:

$$\begin{aligned}
qE_1 &= E_1'E_1'' + F_1'E_2'' + G_1'E_3'' + H_1'\lambda''\,,\\
qF_1 &= E_1'F_1'' + F_1'F_2'' + G_1'F_3'' + H_1'\mu''\,,\\
qG_1 &= E_1'G_1'' + F_1'G_2'' + G_1'G_3'' + H_1'\nu''\,,\\
qH_1 &= E_1'H_1'' + F_1'H_2'' + G_1'H_3'' + H_1'\,,\\
qE_2 &= E_2'E_1'' + F_2'E_2'' + G_2'E_3'' + H_2'\lambda''\,,\\
qF_2 &= E_2'F_1'' + F_2'F_2'' + G_2'F_3'' + H_2'\mu''\,,\\
qG_2 &= E_2'G_1'' + F_2'G_2'' + G_2'G_3'' + H_2'\nu''\,,\\
qH_2 &= E_2'H_1'' + F_2'H_2'' + G_2'H_3'' + H_2'\,,\\
qE_3 &= E_3'E_1'' + F_3'E_2'' + G_3'E_3'' + H_3'\lambda''\,,\\
qF_3 &= E_3'F_1'' + F_3'F_2'' + G_3'F_3'' + H_3'\mu''\,,\\
qG_3 &= E_3'G_1'' + F_3'G_2'' + G_3'G_3'' + H_3'\nu''\,,\\
qH_3 &= E_3'H_1'' + F'_3H_2'' + G_3'H_3'' + H_3'\,,
\end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned}
q\lambda &= \lambda'E_1'' + \mu'E_2'' + \nu'E_3'' + \lambda''\,,\\
q\mu &= \lambda'F_1'' + \mu'F_2'' + \nu'F_3'' + \mu''\,,\\
q\nu &= \lambda'G_1'' + \mu'G_2'' + \nu'G_3'' + \nu''\,.
\end{aligned} \tag{120}$$

Всѣ эти формулы могли-бы быть также составлены по аналогіи съ формулами (115), (116) и (117).

Чтобы опредѣлить вліяніе элементовъ слагаемыхъ перемѣщеній на раздвиганіе и на другіе элементы сложнаго движенія въ отдѣльности, воспользуемся формулами (64), (65), (66, (67), (68) и (69) и отдѣлимъ въ формулахъ (114) чистое раздвиганіе отъ перемѣщенія системы какъ однородно-измѣняемой. Для этого найдемъ прежде всего λ_x, λ_y, λ_z и k. Формула (68) даетъ при помощи извѣстныхъ свойствъ опредѣлителей:

$$\Delta = \frac{\Delta'\Delta''}{p^3}(\lambda'H_1'' + \mu'H_2'' + \nu'H_3'' + 1) = \frac{\Delta'\Delta''}{p^3}q\,;$$

причемъ Δ' и Δ'' суть значенія опредѣлителя (6) для слагаемыхъ перемѣщеній; а по формуламъ (67), (7), (8), (9) и (10):

$$\lambda_x = -\frac{1}{q}(\lambda' E_1'' + \mu' E_2'' + \nu' E_3'' + \lambda'') ,$$

$$\lambda_y = -\frac{1}{q}(\lambda' F_1'' + \mu' F_2'' + \nu' F_3'' + \mu'') , \qquad (121)$$

$$\lambda_z = -\frac{1}{q}(\lambda' G_1'' + \mu' G_2'' + \nu' G_3'' + \nu'') ,$$

или, принимая во вниманіе формулы (120):

$$\lambda_x = -\lambda , \quad \lambda_y = -\mu , \quad \lambda_z = -\nu .$$

Послѣ этого для k получимъ по формуламъ (69), (116) и (121) слѣдующее выраженіе:

$$\begin{aligned} p.q.k = {} & (\alpha'' D_1' + \beta'' D_2' + \gamma'' D_3' + 1)(\lambda' H_1'' + \mu' H_2'' + \nu' H_3'' + 1) \\ & + (D_1' A_1'' + D_2' B_1'' + D_3' C_1'' + D_1'')(\lambda' E_1'' + \mu' E_2'' + \nu' E_3'' + \lambda'') \\ & + (D_1' A_2'' + D_2' B_2'' + D_3' C_2'' + D_2'')(\lambda' F_1'' + \mu' F_2'' + \nu' F_3'' + \mu'') \\ & + (D_1' A_3'' + D_2' B_3'' + D_3' C_3'' + D_3'')(\lambda' G_1'' + \mu' G_2'' + \nu' G_3'' + \nu''). \end{aligned}$$

Если во второй части этой формулы выдѣлить общими множителями D_1', D_2', D_3' и принять во вниманіе тожества (13), (14), (15) и (16), то для k получимъ:

$$k = \frac{1}{pq}(\lambda' D_1' + \mu' D_2' + \nu' D_3' + 1)(\lambda'' D_1'' + \mu'' D_2'' + \nu'' D_3'' + 1)$$

или также, принимая во вниманіе тожество (21):

$$k = \frac{1}{pq}(\alpha' H_1' + \beta' H_2' + \gamma' H_3' + 1)(\alpha'' H_1'' + \beta'' H_2'' + \gamma'' H_3'' + 1) . \qquad (122)$$

Послѣ этого перемѣщеніе (114) можетъ быть замѣнено слѣдующими двумя послѣдовательными перемѣщеніями: 1) перемѣщеніемъ (64) безъ раздвиганія, причемъ для его коэффиціентовъ имѣемъ:

$$\frac{A_1}{k} = \frac{(A_1' A_1'' + A_2' B_1'' + A_3' C_1'' + \alpha' D_1'')(\lambda' H_1'' + \mu' H_2'' + \nu' H_3'' + 1)}{(\alpha' H_1' + \beta' H_2' + \gamma' H_3' + 1)(\alpha'' H_1'' + \beta'' H_2'' + \gamma'' H_3'' + 1)} ,$$

$$\frac{B_1}{k} = \frac{(B_1' A_1'' + B_2' B_1'' + B_3' C_1'' + \beta' D_1'')(\lambda' H_1'' + \mu' H_2'' + \nu' H_3'' + 1)}{(\alpha' H_1' + \beta' H_2' + \gamma' H_3' + 1)(\alpha'' H_1'' + \beta'' H_2'' + \gamma'' H_3'' + 1)} ,$$

. . . . (123)

. . . .

$$\frac{D_3}{k} = \frac{(D_1' A_3'' + D_2' B_3'' + D_3' C_3'' + D_3'')(\lambda' H_1'' + \mu' H_2'' + \nu' H_3'' + 1)}{(\alpha' H_1' + \beta' H_2' + \gamma' H_3' + 1)(\alpha'' H_1'' + \beta'' H_2'' + \gamma'' H_3'' + 1)} ,$$

и 2) чистымъ раздвиганіемъ, слагаемыя котораго на осяхъ координатъ выражаются формулами (121).

Полученные результаты показываютъ, что *въ общемъ случаѣ составнаго перемѣщенія* коллинеарно-измѣняемой системы *раздвиганіе зависитъ не отъ однихъ только раздвиганій слагаемыхъ перемѣщеній*, но также и отъ параметровъ движенія системы какъ однородно-измѣняемой. Съ другой стороны, остальные *параметры* составнаго движенія, *соотвѣтствующіе движенію безъ раздвиганія, зависятъ не отъ однихъ только подобныхъ-же параметровъ слагаемыхъ перемѣщеній, но также и отъ раздвиганій.*

28. О вліяніи порядка двухъ слагаемыхъ перемѣщеній коллинеарно-измѣняемой системы на ихъ результатъ. Общія формулы.

Какъ извѣстно, положеніе какой-нибудь системы, полученное послѣ двухъ послѣдовательныхъ конечныхъ перемѣщеній, зависитъ, вообще говоря, отъ того порядка, въ которомъ эти перемѣщенія производились [1]). Чтобы вліяніе этого порядка опредѣлить, можно сравнивать между собою два различныхъ положенія системы, полученныхъ при различныхъ порядкахъ слагаемыхъ перемѣщеній, и отыскивать параметры того перемѣщенія, которымъ система изъ положенія, полученнаго при одномъ порядкѣ перемѣщеній, можетъ быть переведена въ положеніе, соотвѣтствующее другому порядку перемѣщеній. Найденное такимъ образомъ перемѣщеніе можно для краткости называть „*порядковымъ*“.

Условимся отличать чертою надъ буквами координаты и параметры перемѣщенія, полученные при измѣненномъ порядкѣ слагаемыхъ перемѣщеній. Такимъ образомъ пусть будутъ

$$\bar{x} = \frac{\bar{A}_1 a + \bar{B}_1 b + \bar{C}_1 c + \bar{D}_1}{\bar{\alpha} a + \bar{\beta} b + \bar{\gamma} c + 1}\,,$$

(124) $$\bar{y} = \frac{\bar{A}_2 a + \bar{B}_2 b + \bar{C}_2 c + \bar{D}_2}{\bar{\alpha} a + \bar{\beta} b + \bar{\gamma} c + 1}\,,$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{A}_3 a + \bar{B}_3 b + \bar{C}_3 c + \bar{D}_3}{\bar{\alpha} a + \bar{\beta} b + \bar{\gamma} c + 1}$$

---

[1]) Общій вопросъ о вліяніи порядка послѣдовательныхъ перемѣщеній какой-либо измѣняемой системы на конечное ея положеніе находится въ тѣсной связи съ теоріею подстановокъ вообще. Примѣненіе этой теоріи

уравненія составнаго перемѣщенія, полученныя въ предположеніи, что сначала производится перемѣщеніе, опредѣляемое параметрами A_1'', B_1'', ... γ'', а потомъ перемѣщеніе, опредѣляемое параметрами A_1', B_1' .... γ'. Чтобы получить порядковое перемѣщеніе, мы должны $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ выразить черезъ x, y, z, т. е. изъ шести уравненій (114) и (124) исключить a, b, c. Опредѣляя для этого изъ (114) a, b, c, т. е. вводя коэффиціенты E_1, F_1, ... ν и подставляя полученныя по формуламъ (4) выраженія для a, b, c въ уравненія (124), найдемъ слѣдующій рядъ формулъ:

$$\bar{x} = \frac{\dot{A}_1 x + \dot{B}_1 y + \dot{C}_1 z + \dot{D}_1}{\dot{\alpha} x + \dot{\beta} y + \dot{\gamma} z + 1},$$

$$\bar{y} = \frac{\dot{A}_2 x + \dot{B}_2 y + \dot{C}_2 z + \dot{D}_2}{\dot{\alpha} x + \dot{\beta} y + \dot{\gamma} z + 1}, \qquad (125)$$

$$\bar{z} = \frac{\dot{A}_3 x + \dot{B}_3 y + \dot{C}_3 z + \dot{D}_3}{\dot{\alpha} x + \dot{\beta} y + \dot{\gamma} z + 1};$$

гдѣ

$$\dot{A}_1 = \frac{\bar{A}_1 E_1 + \bar{B}_1 E_2 + \bar{C}_1 E_3 + \bar{D}_1 \lambda}{\bar{\alpha} H_1 + \bar{\beta} H_2 + \bar{\gamma} H_3 + 1},$$

$$\dot{B}_1 = \frac{\bar{A}_1 F_1 + \bar{B}_1 F_2 + \bar{C}_1 F_3 + \bar{D}_1 \mu}{\bar{\alpha} H_1 + \bar{\beta} H_2 + \bar{\gamma} H_3 + 1},$$

$$\dot{C}_1 = \frac{\bar{A}_1 G_1 + \bar{B}_1 G_2 + \bar{C}_1 G_3 + \bar{D}_1 \nu}{\bar{\alpha} H_1 + \bar{\beta} H_2 + \bar{\gamma} H_3 + 1}, \qquad (126)$$

$$\dot{D}_1 = \frac{\bar{A}_1 H_1 + \bar{B}_1 H_2 + \bar{C}_1 H_3 + \bar{D}_1}{\bar{\alpha} H_1 + \bar{\beta} H_2 + \bar{\gamma} H_3 + 1},$$

къ конечнымъ перемѣщеніямъ измѣняемыхъ системъ представляетъ интересное приложеніе чисто алгебраическихъ изслѣдованій къ кинематикѣ. Желательно, чтобы эти вопросы, въ настоящее время еще едва затронутые (Klein и Lie, Math. Annalen, 1871), были разработаны въ бо́льшей полнотѣ.

$$\dot{A}_2 = \frac{\bar{A}_2 E_1 + \bar{B}_2 E_2 + \bar{C}_2 E_3 + \bar{D}_2 \lambda}{\alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 + 1},$$

. . . .

(126) . . . .

$$\dot{D}_3 = \frac{\bar{A}_3 H_1 + \bar{B}_3 H_2 + \bar{C}_3 H_3 + \bar{D}_3}{\bar{\alpha} H_1 + \bar{\beta} H_2 + \gamma H_3 + 1},$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\bar{\alpha} E_1 + \bar{\beta} E_2 + \bar{\gamma} E_3 \alpha + \lambda}{\alpha H_1 + \bar{\beta} H_2 + \bar{\gamma} H_3 + 1},$$

(127)
$$\dot{\beta} = \frac{\bar{\alpha} F_1 + \bar{\beta} F_2 + \bar{\gamma} F_3 + \mu}{\bar{\alpha} H_1 + \bar{\beta} H_2 + \bar{\gamma} H_3 + 1},$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\bar{\alpha} G_1 + \bar{\beta} G_2 + \bar{\gamma} G_3 + \nu}{\bar{\alpha} H_1 + \bar{\beta} H_2 + \bar{\gamma} H_3 + 1}.$$

При этомъ $\bar{A}_1$, $\bar{B}_1$, ... $\bar{\gamma}$ получаются изъ формулъ (115), (116) и (117), если въ нихъ, сообразно съ измѣненіемъ порядка слагаемыхъ перемѣщеній, переставить значки ($'$) и ($''$). Такимъ образомъ:

(128)
$$\bar{p} = \alpha' D_1'' + \beta' D_2'' + \gamma' D''_3 + 1,$$

$$\bar{A}_1 = \frac{1}{\bar{p}} \left(A_1'' A_1' + A_2'' B_1' + A_3'' C_1' + \alpha'' D_1'\right),$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\bar{p}} \left(B_1'' A_1' + B_2'' B_1' + B_3'' C_1' + \beta'' D_1'\right),$$

$$\bar{C}_1 = \frac{1}{\bar{p}} \left(C_1'' A_1' + C_2'' B_1' + C_3'' C_1' + \gamma'' D_1'\right),$$

(129)
$$\bar{D}_1 = \frac{1}{\bar{p}} \left(D_1'' A_1' + D_2'' B_1' + D_3'' C_1' + D_1'\right),$$

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{\bar{p}} \left(A_1'' A_2' + A_2'' B_2' + A_3'' C_2' + \alpha'' D_2'\right),$$

. . . .

. . . .

$$\bar{D}_3 = \frac{1}{\bar{p}} \left(D_1'' A_3' + D_2'' B_3' + D_3'' C_3' + \alpha'' D'_3\right),$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{p}\left(A_1''\alpha' + A_2''\beta' + A_3''\gamma' + \alpha''\right) ,$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{p}\left(B_1''\alpha' + B_2''\beta' + B_3''\gamma' + \beta''\right) , \qquad (130)$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{p}\left(C_1''\alpha' + C_2''\beta' + C_3''\gamma' + \gamma''\right) .$$

Въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы вліяніе порядка перемѣщеній выражается, какъ мы видимъ, перемѣщеніемъ такого-же общаго характера какъ и слагаемыя перемѣщенія. Переходя теперь къ разбору наиболѣе важныхъ частныхъ случаевъ, мы будемъ обращать вниманіе между прочимъ и на тѣ условія, при которыхъ вліяніе порядка упрощается или совсѣмъ исчезаетъ.

29. Соединеніе перемѣщенія общаго вида съ чистымъ раздвиганіемъ.

Если второе слагаемое перемѣщеніе представляетъ собою чистое раздвиганіе, то

$$A_1'' = 1,\ B_1'' = 0,\ C_1'' = 0,\ D_1'' = 0,$$
$$A_2'' = 0,\ B_2'' = 1,\ C_2'' = 0,\ D_2'' = 0,$$
$$A_3'' = 0,\ B_3'' = 0,\ C_3'' = 1,\ D_3'' = 0,$$

и формулы (115), (116) и (117) даютъ:

$$A_1 = \frac{A_1'}{p},\ B_1 = \frac{B_1'}{p},\ C_1 = \frac{C_1'}{p},\ D_1 = \frac{D_1'}{p},$$
$$A_2 = \frac{A_2'}{p},\ B_2 = \frac{B_2'}{p},\ C_2 = \frac{C_2'}{p},\ D_2 = \frac{D_2'}{p}, \qquad (131)$$
$$A_3 = \frac{A_3'}{p},\ B_3 = \frac{B_3'}{p},\ C_3 = \frac{C_3'}{p},\ D_3 = \frac{D_3'}{p};$$

α, β, γ и p выражаются при этомъ такъ-же, какъ и въ самомъ общемъ случаѣ. По формулѣ (122) теперь

$$k = \frac{1}{p}\left(\alpha' H_1' + \beta' H_2' + \gamma' H_3' + 1\right). \qquad (132)$$

Далѣе, по формуламъ (118) и (121), если принять еще во вниманіе формулы (7), (8), (9), (10) и (11), которыя теперь даютъ:

$$E_1''=1,\ E_2''=0,\ E_3''=0,$$
$$F_1''=0,\ F_2''=1,\ F_3''=0,$$
$$G_1''=0,\ G_2''=0,\ G_3''=1,$$
$$H_1''=0,\ H_2''=0,\ H_3''=0,$$

находимъ:

$$q=1,$$
$$\lambda_x=-(\lambda'+\lambda'')=(\lambda_x'+\lambda_x''),$$
$$(133)\qquad \lambda_y=-(\mu'+\mu'')=(\lambda_y'+\lambda_y''),$$
$$\lambda_z=-(\nu'+\nu'')=(\lambda_z'+\lambda_z'').$$

Такимъ образомъ, разсматривая формулы (123), (131), (132) и (133), можемъ сказать: *Когда второе изъ слагаемыхъ перемѣщеній состоитъ только изъ чистаго раздвиганія, то 1) коэффиціенты однородной деформаціи составнаго перемѣщенія пропорціональны коэффиціентамъ однородной деформаціи* [1]) *перваго изъ слагаемыхъ перемѣщеній, причемъ коэффиціентъ пропорціональности*

$$\frac{1}{pk}=\frac{1}{\alpha' H_1'+\beta' H_2'+\gamma' H_3'+1}$$

не зависитъ отъ вторaго слагаемаго перемѣщенія, и 2) коэффиціенты чистаго раздвиганія составнаго перемѣщенія равны суммѣ коэффиціентовъ раздвиганій слагаемыхъ перемѣщеній и слѣдовательно *раздвиганіе составнаго перемѣщенія равно геометрической суммѣ раздвиганій слагаемыхъ перемѣщеній.*

Порядокъ перемѣщеній, вообще говоря, оказываетъ вліяніе на составное перемѣщеніе, *но это вліяніе по отношенію къ однородной деформаціи составнаго перемѣщенія исчезаетъ, если первое слагаемое перемѣщеніе (общаго вида) не содержитъ поступательной слагаемой,* т. е. если центры обоихъ слагаемыхъ раздвиганій совпадаютъ. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ

$$D_1'=0,\ D_2'=0,\ D_3'=0;$$

поэтому

$$\bar{p}=p=1,$$
$$\bar{A}_1=A_1,\ \bar{B}_1=B_1,\ \ldots\ldots$$

---

[1]) Здѣсь подъ выраженіемъ: „однородная деформація" мы будемъ для краткости подразумѣвать какое-нибудь движеніе системы, лишенное раздвиганій.

какъ это видно изъ сравненія формулъ (116) и (129). Вліяніе порядка перемѣщеній на раздвиганіе составнаго перемѣщенія остается и въ этомъ случаѣ, какъ это можно видѣть изъ формулъ (121), которыя при измѣненномъ порядкѣ перемѣщеній принимаютъ видъ:

$$\lambda_x = -(\lambda'' E_1' + \mu'' E_2' + \nu'' E_3' + \lambda'),$$
$$\lambda_y = -(\lambda'' F_1' + \mu'' F_2' + \nu'' F_3' + \mu'),$$
$$\lambda_z = -(\lambda'' G_1' + \mu'' G_2' + \nu'' G_3' + \nu').$$

Это вліяніе исчезаетъ лишь тогда, когда оба слагаемыхъ перемѣщенія состоятъ изъ чистыхъ раздвиганій съ общимъ центромъ. Къ этому вопросу мы еще вернемся въ § 32 и § 33.

30. Соединеніе перемѣщенія общаго вида съ однородною деформаціей.

Если второе перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы лишено раздвиганій, то раздвиганіе перваго слагаемаго перемѣщенія вліяетъ на однородную деформацію составнаго перемѣщенія, какъ это видно изъ формулъ (116), въ которыхъ послѣдній членъ не исчезаетъ. Точно такъже, хотя формулы (115) и (117) даютъ:

$$p = 1,\ \alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma',$$

но раздвиганіе составнаго перемѣщенія зависитъ отъ однородной деформаціи перваго слагаемаго; ибо формулы (121) теперь имѣютъ видъ:

$$\lambda_x = -\frac{1}{q}(\lambda' E_1'' + \mu' E_2'' + \nu' E_3''),$$
$$\lambda_y = -\frac{1}{q}(\lambda' F_1'' + \mu' F_2'' + \nu' F_3''),$$
$$\lambda_z = -\frac{1}{q}(\lambda' G_1'' + \mu' G_2'' + \nu' G_3'').$$

При измѣненномъ порядкѣ составное перемѣщеніе представляется иначе. Формулы (129) вмѣстѣ съ (128) и выраженіе (122) для k показываютъ, что однородная деформація составнаго перемѣщенія хотя и не исключительно зависитъ отъ однородныхъ деформацій слагаемыхъ перемѣщеній, но *подобна* тому перемѣщенію, которое имѣла-бы система, еслибы раздвиганія въ слагаемыя перемѣщенія вовсе не входили. Дѣйствительно, теперь числители выраженій для $\overline{A_1}$, $\overline{B_1}$, ... $\overline{D_3}$ не со-

10

держатъ коэффиціентовъ раздвиганій. *Вліяніе порядка перемѣщеній на однородную деформацію составнаго перемѣщенія совсѣмъ исчезаетъ, если второе изъ данныхъ перемѣщеній (однородная деформація) не содержитъ поступательныхъ слагаемыхъ;* ибо тогда

$$D_1'' = 0,\ D_2'' = 0,\ D_3'' = 0,$$

а потому

$$\overline{A}_1 = A_1,\ \overline{B}_1 = B_1,\ \ldots,\ \overline{D}_3 = D_3.$$

31. Соединеніе двухъ раздвиганій изъ разныхъ центровъ.

Обратимся къ самому общему случаю, когда центры раздвиганій не совпадаютъ и направленія слагаемыхъ раздвиганій различны. Пусть будетъ O_1 $(x_1\ y_1\ z_1)$ центръ перваго раздвиганія, O_2 $(x_2\ y_2\ z_2)$ центръ втораго раздвиганія и $(\lambda_x', \lambda_y', \lambda_z')$, $(\lambda_x'', \lambda_y'', \lambda_z'')$ слагаемыя самыхъ раздвиганій по координатнымъ осямъ. Составляемыя перемѣщенія будутъ опредѣляться формулами вида (79), т. е.

$$x' - x_1 = \frac{a - x_1}{\lambda_x'(a - x_1) + \lambda_y'(b - y_1) + \lambda_z'(c - z_1) + 1},$$

$$y' - y_1 = \frac{b - y_1}{\lambda_x'(a - x_1) + \lambda_y'(b - y_1) + \lambda_z'(c - z_1) + 1},$$

$$z' - z_1 = \frac{c - z_1}{\lambda_x'(a - x_1) + \lambda_y'(b - y_1) + \lambda_z'(c - z_1) + 1}.$$

$$x - x_2 = \frac{x' - x_2}{\lambda_x''(x' - x_2) + \lambda_y''(y' - y_2) + \lambda_z''(z' - z_2) + 1},$$

$$y - y_2 = \frac{y' - y_2}{\lambda_x''(x' - x_2) + \lambda_y''(y' - y_2) + \lambda_z''(z' - z_2) + 1},$$

$$z - z_2 = \frac{z' - z_2}{\lambda_x''(x' - x_2) + \lambda_y''(y' - y_2) + \lambda_z''(z' - z_2) + 1}.$$

Подставивъ въ эти послѣднія формулы вмѣсто x', y', z' ихъ выраженія черезъ начальныя координаты, мы и получимъ формулы, опредѣляющія совокупность двухъ послѣдовательныхъ раздвиганій. Эти формулы можно представить въ такомъ видѣ:

$$x - x_2 = \frac{[1+\lambda_x'(x_1-x_2)](a-x_1)+\lambda_y'(x_1-x_2)(b-y_1)+\lambda_z'(x_1-x_2)(c-z_1)+x_1-x_2}{(\lambda_x''+\lambda_x'U_2)(a-x_1)+(\lambda_y''+\lambda_y'U_2)(b-y_1)+(\lambda_z''+\lambda_z'U_2)(c-z_1)+U_2},$$

$$y - y_2 = \frac{\lambda_x'(y_1-y_2)(a-x_1)+[1+\lambda_y'(y_1-y_2)](b-y_1)+\lambda_z'(y_1-y_2)(c-z_1)+y_1-y_2}{(\lambda_x''+\lambda_x'U_2)(a-x_1)+(\lambda_y''+\lambda_y'U_2)(b-y_1)+(\lambda_z''+\lambda_z'U_2)(c-z_1)+U_2}, \quad (134)$$

$$z - z_2 = \frac{\lambda_x'(z_1-z_2)(a-x_1)+\lambda_y'(z_1-z_2)(b-y_1)+[1+\lambda_z'(z_1-z_2)](c-z_1)+z_1-z_2}{(\lambda_x''+\lambda_x'U_2)(a-x_1)+(\lambda_y''+\lambda_y'U_2)(b-y_1)+(\lambda_z''+\lambda_z'U_2)(c-z_1)+U_2},$$

гдѣ

$$U_2 = \lambda_x''(x_1 - x_2) + \lambda_y''(y_1 - y_2) + \lambda_z''(z_1 - z_2) + 1.$$

Эти формулы выражаютъ перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы, вообще говоря, болѣе сложное, чѣмъ простое раздвиганіе. Сдѣлавъ разложеніе этого перемѣщенія по правилу, указанному въ § 14, мы увидѣли-бы, что это перемѣщеніе состоитъ изъ раздвиганія, сопряженнаго съ движеніемъ системы какъ однородно-измѣняемой.

32. Условія, при которыхъ соединеніе двухъ раздвиганій даетъ чистое раздвиганіе.

Для того, чтобы формулы (134) могли давать простое раздвиганіе, необходимо, чтобы элементы составляемыхъ раздвиганій были связаны между собою нѣкоторыми условіями, которыя мы теперь и опредѣлимъ. Формулы (134) будутъ представлять простое раздвиганіе въ томъ случаѣ, если ихъ можно будетъ представить въ видѣ уравненій (79). Чтобы рѣшить вопросъ, когда это возможно, преобразуемъ формулы (134) такимъ образомъ, чтобы тамъ вездѣ изъ перемѣнныхъ координатъ вычитались координаты искомаго центра раздвиганій (x_0, y_0, z_0). Подставляя

$$\begin{aligned} x - x_2 &= (x - x_0) + (x_0 - x_2), \\ y - y_2 &= (y - y_0) + (y_0 - y_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c - z_1 &= (c - z_0) + (z_0 - z_1), \end{aligned}$$

мы найдемъ:

$$x - x_0 = \frac{L_1(a - x_0) + M_1(b - y_0) + N_1(c - z_0) + P_1}{(\lambda_x'' + \lambda_x'U_2)(a-x_0) + (\lambda_y'' + \lambda_y'U_2)(b-y_0)+(\lambda_z''+\lambda_z'U_2)(c-z_0)+Q}, \quad (135)$$

$$y - y_0 = \frac{L_2(a - x_0) + M_2(b - y_0) + N_2(c - z_0) + P_2}{(\lambda_x'' + \lambda_x' U_2)(a - x_0) + (\lambda_y'' + \lambda_y' U_2)(b - y_0) + (\lambda_z'' + \lambda_z' U_2)(c - z_0) + Q},$$

(135) $$z - z_0 = \frac{L_3(a - x_0) + M_3(b - y_0) + N_3(c - z_0) + P_3}{(\lambda_x'' + \lambda_x' U_2)(a - x_0) + (\lambda_y'' + \lambda_y' U_2)(b - y_0) + (\lambda_z'' + \lambda_z' U_2)(c - z_0) + Q},$$

положивъ для сокращенія:

$$L_1 = 1 + \lambda_x'(x_2 - x_2) - (\lambda_x'' + \lambda_x' U_2)(x_0 - x_2),$$
$$M_1 = \lambda_y'(x_1 - x_2) - (\lambda_y'' + \lambda_y' U_2)(x_0 - x_2),$$
$$N_1 = \lambda_z'(x_1 - x_2) - (\lambda_z'' + \lambda_z' U_2)(x_0 - x_2),$$
$$P_1 = L_1(x_0 - x_1) + M_1(y_0 - y_1) + N_1(z_0 - z_1) + x_1 - x_2 - U_2(x_0 - x_2),$$
$$L_2 = \lambda_x'(y_1 - y_2) - (\lambda_x'' + \lambda_x' U_2)(y_0 - y_2),$$
$$M_2 = 1 + \lambda_y'(y_1 - y_2) - (\lambda_y'' + \lambda_y' U_2)(y_0 - y_2),$$
$$N_2 = \lambda_z'(y_1 - y_2) - (\lambda_z'' + \lambda_z' U_2)(y_0 - y_2),$$
$$P_2 = L_2(x_0 - x_1) + M_2(y_0 - y_1) + N_2(z_0 - z_1) + y_1 - y_2 - U_2(y_0 - y_2),$$
$$L_3 = \lambda_x'(z_1 - z_2) - (\lambda_x'' + \lambda_x' U_2)(z_0 - z_2),$$
$$M_3 = \lambda_y'(z_1 - z_2) - (\lambda_y'' + \lambda_y' U_2)(z_0 - z_2),$$
$$N_3 = 1 + \lambda_z'(z_1 - z_2) - (\lambda_z'' + \lambda_z' U_2)(z_0 - z_2),$$
$$P_3 = L_3(x_0 - x_1) + M_3(y_0 - y_1) + N_3(z_0 - z_1) + z_1 - z_2 - U_2(z_0 - z_2),$$
$$Q = (\lambda_x'' + \lambda_x' U_2)(x_0 - x_1) + (\lambda_y'' + \lambda_y' U_2)(y_0 - y_1),$$
$$+ (\lambda_z'' + \lambda_z' U_2)(z_0 - z_1) + U_2.$$

Для того, чтобы формулы (135) были тождественны съ формулами (79), должны быть выполнены слѣдующія условія:

(136) $$L_1 = M_2 = N_3,$$

(137) $$M_1 = 0,\ N_1 = 0,\ P_1 = 0,$$

(138) $$L_2 = 0,\ N_2 = 0,\ P_2 = 0,$$

(139) $$L_3 = 0,\ M_3 = 0,\ P_3 = 0,$$

и кромѣ того мы должны еще имѣть:

(140) $$\frac{L_1}{Q} = 1.$$

Тогда мы получимъ для коэффиціентовъ составнаго раздвиганія:

$$\lambda_x = \frac{\lambda_x'' + \lambda_x' U_2}{L_1}, \quad \lambda_y = \frac{\lambda_y'' + \lambda_y' U_2}{L_1}, \quad \lambda_z = \frac{\lambda_z'' + \lambda_z' U_2}{L_1}.$$

33. Разборъ предыдущихъ условій.

При изслѣдованіи предыдущихъ условій нужно различать два случая: 1) когда центры слагаемыхъ раздвиганій не совпадаютъ и 2) когда они совпадаютъ.

Обращаясь къ первому случаю, мы можемъ предполагать, что ни одна изъ разностей $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ не равна нулю; если-бы одна или двѣ изъ этихъ разностей оказались равными нулю, то можно было-бы перемѣною направленій координатныхъ осей этого избѣжать. Первыя два изъ условій (137) даютъ:

$$\frac{\lambda_y''}{\lambda_y'} = \frac{\lambda_z''}{\lambda_z'},$$

а первыя два изъ условій (139):

$$\frac{\lambda_z''}{\lambda_z'} = \frac{\lambda_x''}{\lambda_x'},$$

послѣ чего первыя два изъ условій (138) удовлетворяются сами собою. Послѣднее изъ условій (137), если положить

$$\frac{\lambda_x''}{\lambda_x'} = \frac{\lambda_y''}{\lambda_y'} = \frac{\lambda_z''}{\lambda_z'} = k \tag{141}$$

и подставить

$$x_0 - x_2 = \frac{\lambda_y'(x_1 - x_2)}{\lambda_y'' + \lambda_y' U_2} = \frac{x_1 - x_2}{k + U_2},$$

приводится къ слѣдующему:

$$U_2 = 1,$$

т. е.

$$\lambda_x''(x_1 - x_2) + \lambda_y''(y_1 - y_2) + \lambda_z''(z_1 - z_2) = 0. \tag{142}$$

Къ тому-же приводятъ и послѣднія изъ условій (138) и (139). Что касается до условій (136), то они теперь удовлетворяются сами собою,

такъ какъ каждая изъ величинъ L_1, M_2, N_3 обращается въ единицу. Условіе (140) тоже удовлетворяется, потому что теперь

$$Q = 1.$$

Для координатъ центра составнаго раздвиганія мы получаемъ:

$$(143) \qquad x_0 = \frac{k\,x_2 + x_1}{k+1},\ y_0 = \frac{k\,y_2 + y_1}{k+1},\ z_0 = \frac{k\,z_2 + z_1}{k+1},$$

а для коэффиціентовъ этого раздвиганія:

$$(144) \qquad \begin{aligned} \lambda_x &= \lambda_x' + \lambda_x'', \\ \lambda_y &= \lambda_y' + \lambda_y'', \\ \lambda_z &= \lambda_z' + \lambda_z''. \end{aligned}$$

Итакъ, если центры слагаемыхъ раздвиганій не совпадаютъ, то (141) и (142) суть необходимыя и достаточныя условія для того, чтобы совокупность двухъ раздвиганій была тоже простымъ раздвиганіемъ. Мы можемъ найденные результаты формулировать слѣдующимъ образомъ:

Для того, чтобы совокупность двухъ раздвиганій изъ различныхъ центровъ была эквивалентна простому раздвиганію, необходимо и достаточно: 1) чтобы направленія слагаемыхъ раздвиганій совпадали, и 2) чтобы центры слагаемыхъ раздвиганій лежали на прямой, перпендикулярной къ общему направленію раздвиганій. Направленіе сложнаго раздвиганія будетъ при этомъ совпадать съ направленіемъ слагаемыхъ раздвиганій, коэффиціенты его будутъ равны суммамъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ слагаемыхъ раздвиганій и центръ его будетъ находиться на прямой, соединяющей центры слагаемыхъ раздвиганій, раздѣляя разстояніе между ними въ отношеніи, обратномъ отношенію соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ раздвиганій.

Во второмъ случаѣ, *когда центры слагаемыхъ раздвиганій совпадаютъ, составное движеніе всегда будетъ простымъ раздвиганіемъ съ тѣмъ-же самымъ центромъ.* Это можно видѣть прямо изъ формулъ (134), которыя, если въ нихъ положить

$$x_1 = x_2,\quad y_1 = y_2,\quad z_1 = z_2,$$

обращаются въ слѣдующія:

$$x - x_1 = \frac{a - x_1}{(\lambda_x' + \lambda_x'')(a - x_1) + (\lambda_y' + \lambda_y'')(b - y_1) + (\lambda_z' + \lambda_z'')(c - z_1) + 1},$$

$$y - y_1 = \frac{b - y_1}{(\lambda_x' + \lambda_x'')(a - x_1) + (\lambda_y' + \lambda_y'')(b - y_1) + (\lambda_z' + \lambda_z'')(c - z_1) + 1}, \quad (145)$$

$$z - z_1 = \frac{c - z_1}{(\lambda_x' + \lambda_x'')(a - x_1) + (\lambda_y' + \lambda_y'')(b - y_1) + (\lambda_z' + \lambda_z'')(c - z_1) + 1},$$

причемъ направленія слагаемыхъ раздвиганій могутъ теперь и не совпадать.

Послѣднія формулы показываютъ, что *величина сложнаго раздвиганія есть геометрическая сумма величинъ слагаемыхъ раздвиганій,* если величину раздвиганія откладывать такъ, какъ объ этомъ было сказано въ § 15.

Выше приведенные результаты свидѣтельствуютъ объ аналогіи между раздвиганіями и вращеніями около осей. Подобно тому, какъ два вращенія эквивалентны одному простому вращенію только въ томъ случаѣ, когда оси данныхъ вращеній параллельны или пересѣкаются, такъ и два раздвиганія даютъ простое раздвиганіе только въ томъ случаѣ, когда направленія этихъ раздвиганій параллельны или имѣютъ общій центръ. Наконецъ и законъ составленія сложнаго раздвиганія вполнѣ аналогиченъ съ закономъ опредѣленія вращенія, эквивалентнаго даннымъ.

34. Порядокъ слагаемыхъ раздвиганій.

Порядокъ двухъ послѣдовательныхъ конечныхъ раздвиганій, вообще говоря, не безразличенъ. Дѣйствительно, измѣняя этотъ порядокъ противъ принятаго нами въ § 31, т. е., употребляя формулы

$$x' - x_2 = \frac{a - x_2}{\lambda_x''(a - x_2) + \lambda_y''(b - y_2) + \lambda_z''(c - z_2) + 1},$$

$$y' - y_2 = \frac{b - y_2}{\lambda_x''(a - x_2) + \lambda_y''(b - y_2) + \lambda_z''(c - z_2) + 1},$$

$$z' - z_2 = \frac{c - z_2}{\lambda_x''(a - x_2) + \lambda_y''(b - y_2) + \lambda_z''(c - z_2) + 1},$$

$$x-x_1=\frac{x'-x_1}{\lambda_x'(x'-x_1)+\lambda_y'(y'-y_1)+\lambda_z'(z'-z_1)+1},$$

$$y-y_1=\frac{y'-y_1}{\lambda_x'(x'-x_1)+\lambda_y'(y'-y_1)+\lambda_z'(z'-z_1)+1},$$

$$z-z_1=\frac{z'-z_1}{\lambda_x'(x'-x_1)+\lambda_y'(y'-y_1)+\lambda_z'(z'-z_1)+1},$$

мы получимъ для x, y, z слѣдующія выраженія черезъ начальныя координаты:

$$x-x_1=$$
$$\frac{[1+\lambda_x''(x_2-x_1)](a-x_2)+\lambda_y''(x_2-x_1)(b-y_2)+\lambda_z''(x_2-x_1)(c-z_2)+(x_2-x_1)}{(\lambda_x'+\lambda_x''U_1)(a-x_2)+(\lambda_y'+\lambda_y''U_1)(b-y_2)+(\lambda_z'+\lambda_z''U_1)(c-z_2)+U_1},$$

$$y-y_1=$$
$$\frac{\lambda_x''(y_2-y_1)(a-x_2)+[1+\lambda_y''(y_2-y_1)](b-y_2)+\lambda_z''(y_2-y_1)(c-z_2)+(y_2-y_1)}{(\lambda_x'+\lambda_x''U_1)(a-x_2)+(\lambda_y'+\lambda_y''U_1)(b-y_2)+(\lambda_z'+\lambda_z''U_1)(c-z_2)+U_1},$$

$$z-z_1=$$
$$\frac{\lambda_x''(z_2-z_1)(a-x_2)+\lambda_y''(z_2-z_1)(b-y_2)+[1+\lambda_z''(z_2-z_1)](c-z_2)+(z_2-z_1)}{(\lambda_x'+\lambda_x''U_1)(a-x_2)+(\lambda_y'+\lambda_y''U_1)(b-y_2)+(\lambda_z'+\lambda_z''U_1)(c-z_2)+U_1},$$

причемъ

$$U_1=\lambda_x'(x_2-x_1)+\lambda_y'(y_2-y_1)+\lambda_z'(z_2-z_1)+1.$$

Дѣлая сравненіе этихъ формулъ съ формулами (134), мы убѣдимся, что первыя не будутъ въ общемъ случаѣ тождественны со вторыми.

Вліяніе порядка слагаемыхъ раздвиганій исчезаетъ, если ихъ совокупность даетъ опять простое раздвиганіе. Дѣйствительно, въ случаѣ несовпадающихъ центровъ раздвиганій, если притомъ составное перемѣщеніе приводится къ простому раздвиганію, мы имѣемъ для этого перемѣщенія формулы (79), гдѣ x_0, y_0, z_0 опредѣляются по формуламъ (143). Измѣняя порядокъ слагаемыхъ перемѣщеній, мы должны въ формулахъ (143) и (144) переставить значки у слагаемыхъ коэффиціентовъ раздвиганій и у координатъ ихъ центровъ. Но при этомъ формулы (144) не измѣняются, а k замѣняется черезъ $\frac{1}{k}$ и формулы (143) принимаютъ видъ:

$$x_0 = \frac{\frac{1}{k}x_1 + x_2}{1 + \frac{1}{k}}, \quad y_0 = \frac{\frac{1}{k}y_1 + y_2}{1 + \frac{1}{k}}, \quad z_0 = \frac{\frac{1}{k}z_1 + z_2}{1 + \frac{1}{k}},$$

т. е. тоже остаются безъ перемѣны.

Когда-же центры слагаемыхъ раздвиганій совпадаютъ, то прямо формулы (145) показываютъ, что измѣненіе порядка раздвиганій не вліяетъ на окончательное положеніе системы.

Для болѣе частнаго случая это было уже указано въ концѣ § 17.

35. Переносъ центра раздвиганій.

Къ вопросу о составномъ перемѣщеніи относится опредѣленіе вліянія, которое оказываетъ на положеніе системы замѣненіе раздвиганія другимъ раздвиганіемъ, имѣющимъ при томъ-же направленіи и величинѣ другой центръ. Для простоты возьмемъ ось (x) по направленію даннаго раздвиганія, и пусть будутъ x_0, y_0, z_0 координаты центра раздвиганія и λ его величина. Тогда уравненія чистаго раздвиганія системы будутъ слѣдующія:

$$x - x_0 = \frac{a - x_0}{\lambda(a - x_0) + 1}, \quad y - y_0 = \frac{b - y_0}{\lambda(a - x_0) + 1},$$
$$z - z_0 = \frac{c - z_0}{\lambda(a - x_0) + 1}. \tag{146}$$

Перенесемъ центръ раздвиганія въ другую точку, въ которой для простоты можемъ предполагать помѣщеннымъ начало координатъ. Положеніе точки (a, b, c) послѣ раздвиганія изъ этого центра будетъ отличаться отъ полученнаго первоначально и будетъ опредѣляться формулами:

$$x' = \frac{a}{\lambda a + 1}, \quad y' = \frac{b}{\lambda a + 1}, \quad z' = \frac{c}{\lambda a + 1}. \tag{147}$$

Для опредѣленія различія въ полученныхъ перемѣщеніяхъ составимъ формулы для перехода отъ координатъ x', y', z' къ координатамъ x, y, z, исключивъ для этого a, b, c изъ уравненій (146) и (147). Эти формулы будутъ:

$$x = \frac{\frac{\lambda^2 x_0^2 + \lambda x_0 + 1}{1 - \lambda x_0} x' - \frac{\lambda x_0^2}{1 - \lambda x_0}}{\frac{\lambda^2 x_0}{1 - \lambda x_0} x' + 1},$$

(148) $$y = \frac{\frac{\lambda y_0(1 + \lambda x_0)}{1 - \lambda x_0} x' + \frac{1}{1 - \lambda x_0} y' + \frac{\lambda x_0 y_0}{1 - \lambda x_0}}{\frac{\lambda^2 x_0}{1 - \lambda x_0} x' + 1},$$

$$z = \frac{\frac{\lambda z_0(1 + \lambda x_0)}{1 - \lambda x_0} x' + \frac{1}{1 - \lambda x_0} z' - \frac{\lambda x_0 z_0}{1 - \lambda x_0}}{\frac{\lambda^2 x_0}{1 - \lambda x_0} x' + 1}.$$

Для удобства можно эти формулы, положивъ

$$\frac{\lambda(1 + \lambda x_0)}{1 - \lambda x_0} = p, \qquad \frac{1}{1 - \lambda x_0} = q,$$

представить такъ:

$$x = \frac{(p x_0 + q) x' - \lambda x_0^2 q}{\lambda^2 x_0 q x' + 1},$$

(149) $$y = \frac{p y_0 x' + q y' - \lambda x_0 y_0 q}{\lambda^2 x_0 q x' + 1},$$

$$z = \frac{p z_0 x' + q z' - \lambda x_0 z_0 q}{\lambda^2 x_0 q x' + 1}.$$

Видъ этихъ формулъ показываетъ, что въ общемъ случаѣ переносъ центра раздвиганія требуетъ добавленія такого перемѣщенія коллинеарно-измѣняемой системы, которое состоитъ уже не изъ одного раздвиганія, но содержитъ въ себѣ также и однородную деформацію. Сдѣлаемъ разложеніе этого перемѣщенія по формуламъ § 14. Эти формулы даютъ:

$$\Delta = q^2 (p x_0 + q),$$

$$\lambda_x = \frac{\lambda^2 x_0 q}{p x_0 + q}, \ \lambda_y = 0, \ \lambda_z = 0,$$

$$k = 1 + \lambda x_0 q \frac{\lambda^2 x_0 q}{p x_0 + q} = \frac{\lambda^3 x_0^2 q^2 + p x_0 + q}{p x_0 + q};$$

такъ-что перемѣщеніе (149) разлагается на перемѣщеніе системы какъ однородно-измѣняемой:

$$\xi = \frac{p x_0 + q}{k} x' - \frac{\lambda x_0^2 q}{k},$$

$$\eta = \frac{p y_0}{k} x' + \frac{q}{k} y' - \frac{\lambda x_0 y_0 q}{k}, \qquad (150)$$

$$\zeta = \frac{p z_0}{k} x' + \frac{q}{k} z' - \frac{\lambda x_0 z_0 q}{k},$$

и на чистое раздвиганіе:

$$x = \frac{\xi}{\frac{\lambda^2 x_0 q}{p x_0 + q} \xi + 1}, \qquad y = \frac{\eta}{\frac{\lambda^2 x_0 q}{p x_0 + q} \xi + 1},$$

$$z = \frac{\zeta}{\frac{\lambda^2 x_0 q}{p x_0 + q} \xi + 1}. \qquad (151)$$

Чистое раздвиганіе (151), имѣя то-же направленіе, какъ и данное, (147), можетъ быть съ нимъ сложено въ одно по правилу, указанному въ § 33. Величина его будетъ:

$$\Lambda = \lambda + \frac{\lambda^2 x_0 q}{p x_0 + q} = \lambda \frac{(1 + \lambda x_0)^2}{1 + \lambda x_0 + \lambda^2 x_0^2}.$$

Такимъ образомъ, при переносѣ центра раздвиганія, величина его увеличивается въ

$$\frac{(\lambda x_0 + 1)^2}{\lambda^2 x_0^2 + \lambda x_0 + 1}$$

разъ. Здѣсь x_0 представляетъ собою проекцію разстоянія между центрами раздвиганія на направленіе самаго раздвиганія. Къ этому присоединяется еще (150) перемѣщеніе системы какъ однородно-измѣняемой. Характеръ этого послѣдняго перемѣщенія довольно общій, хотя впрочемъ

можетъ быть изслѣдованъ по формуламъ § 19 весьма просто, такъ какъ въ настоящемъ случаѣ кубическое уравненіе (95) для опредѣленія главныхъ удлиненій распадается на два, ибо теперь

$$L_{22} = L_{33}, \; L_{23} = 0.$$

Если направленіе переноса центра раздвиганій совпадаетъ съ направленіемъ даннаго раздвиганія, то перемѣщеніе (150) представляетъ собою соединеніе поступательнаго перемѣщенія вдоль оси раздвиганія съ чистою деформаціею, въ которой одно главное удлиненіе направлено по оси раздвиганія, а другія два, къ нему перпендикулярныя, равны.

Если, наконецъ, направленіе переноса центра раздвиганія перпендикулярно къ оси раздвиганія, то x_0 нужно принять равнымъ нулю, и формула (151) тогда показываетъ, что добавочное перемѣщеніе не содержитъ раздвиганія, а опредѣляется лишь уравненіями (150), которыя теперь принимаютъ видъ:

$$\begin{aligned} x &= \xi, \\ y &= \lambda y_0 \, \xi + \eta, \\ z &= \lambda z_0 \, \xi + \zeta. \end{aligned}$$

Это перемѣщеніе, какъ показываютъ формулы (104), представляетъ собою сдвиганіе. Формулы (107) и (108) даютъ:

$$\begin{aligned} & 4tg^2 \, \sigma = \lambda^2 \, (y_0{}^2 + z_0{}^2), \\ & P^2 = 1, \; Q^2 = 0, \; R^2 = 0, \\ & S^2 = 0, \; T^2 = \lambda^2 y_0{}^2, \; U^2 = \lambda^2 z_0{}^2; \end{aligned}$$

т. е. основная плоскость этого сдвиганія перпендикулярна къ направленію раздвиганія; направленіе-же сдвиганія совпадаетъ съ направленіемъ переноса центра раздвиганій; *величина сдвиганія равна произведенію величины даннаго раздвиганія на величину переноса его центра.*

36. Соединеніе двухъ перемѣщеній однородно-измѣняемой системы.

Перемѣщеніе, эквивалентное двумъ перемѣщеніямъ однородно-измѣняемой системы, выражается формулами (115), (116) и (117), если въ нихъ принять α', β', γ', α'', β'', γ'' равными нулю и поэтому также

$$p = 1, \; \alpha = 0, \; \beta = 0, \; \gamma = 0.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\begin{aligned} x &= A_1 a + B_1 b + C_1 c + D_1, \\ y &= A_2 a + B_2 b + C_2 c + D_2, \\ z &= A_3 a + B_3 b + C_3 c + D_3, \end{aligned} \tag{152}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1'A_1'' + A_2'B_1'' + A_3'C_1'', \\ B_1 &= B_1'A_1'' + B_2'B_1'' + B_3'C_1'', \\ C_1 &= C_1'A_1'' + C_2'B_1'' + C_3'C_1'', \\ D_1 &= D_1'A_1'' + D_2'B_1'' + D_3'C_1'' + D_1'', \\ A_2 &= A_1'A_2'' + A_2'B_2'' + A_3'C_2'', \\ B_2 &= B_1'A_2'' + B_2'B_2'' + B_3'C_2'', \\ C_2 &= C_1'A_2'' + C_2'B_2'' + C_3'C_2'', \\ D_2 &= D_1'A_2'' + D_2'B_2'' + D_3'C_2'' + D_2'', \\ A_3 &= A_1'A_3'' + A_2'B_3'' + A_3'C_3'', \\ B_3 &= B_1'A_3'' + B_2'B_3'' + B_3'C_3'', \\ C_3 &= C_1'A_3'' + C_2'B_3'' + C_3'C_3'', \\ D_3 &= D_1'A_3'' + D_2'B_3'' + D_3'C_3'' + D_3''. \end{aligned} \tag{153}$$

Точно также при измѣненномъ порядкѣ слагаемыхъ перемѣщеній по формуламъ (128), (129) и (130) находимъ:

$$\overline{p} = 1,\ \overline{\alpha} = 0,\ \overline{\beta} = 0,\ \overline{\gamma} = 0,$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \overline{A}_1 a + \overline{B}_1 b + \overline{C}_1 c + \overline{D}_1, \\ \overline{y} &= \overline{A}_2 a + \overline{B}_2 b + \overline{C}_2 c + \overline{D}_2, \\ \overline{z} &= \overline{A}_3 a + \overline{B}_3 b + \overline{C}_3 c + \overline{D}_3; \end{aligned} \tag{154}$$

причемъ коэффиціенты получаются по формуламъ (153), если въ нихъ переставить значки (′) и (″).

Для опредѣленія вліянія порядка перемѣщеній на ихъ результатъ мы могли-бы но общимъ формуламъ (125), (126) и (127) составить выраженія для *порядковаго* перемѣщенія. Не повторяя теперь этого пріема въ приложеніи къ однородно-измѣняемой системѣ, замѣтимъ, что вопросъ этотъ можетъ быть также изслѣдованъ другимъ путемъ. Опредѣляя разности $\overline{x} - x$, $\overline{y} - y$, $\overline{z} - z$ по формуламъ (152) и (154), мы найдемъ порядковое перемѣщеніе выраженнымъ въ начальныхъ координатахъ:

$$\bar{x} - x = (\bar{A}_1 - A_1)\, a + (\bar{B}_1 - B_1)\, b + (\bar{C}_1 - C_1)\, c + \bar{D}_1 - D_1,$$
$$\bar{y} - y = (\bar{A}_2 - A_2)\, a + (\bar{B}_2 - B_2)\, b + (\bar{C}_2 - C_2)\, c + \bar{D}_2 - D_2,$$
$$\bar{z} - z = (\bar{A}_3 - A_3)\, a + (\bar{B}_3 - B_3)\, b + (\bar{C}_3 - C_3)\, c + \bar{D}_3 - D_3.$$

Полагая

$$\bar{x} - x = X - a,\ \bar{y} - y = Y - b,\ \bar{z} - z = Z - c,$$

можно написать

$$\bar{x} = X + x - a,$$
$$\bar{y} = Y + y - b,$$
$$\bar{z} = Z + z - c;$$

т. е. положеніе точки системы при измѣненномъ порядкѣ слагаемыхъ перемѣщеній можетъ быть получено, если системѣ дать перемѣщеніе, опредѣляемое формулами

$$(155)\quad \begin{aligned} X &= (\bar{A}_1 - A_1 + 1)\, a + (\bar{B}_1 - B_1)\, b + (\bar{C}_1 - C_1)\, c + \bar{D}_1 - D_1\,, \\ Y &= (\bar{A}_2 - A_2)\, a + (\bar{B}_2 - B_2 + 1)\, b + (\bar{C}_2 - C_2) c + \bar{D}_2 - D_2\,, \\ Z &= (\bar{A}_3 - A_3)\, a + (\bar{B}_3 - B_3)\, b + (\bar{C}_3 - C_3 + 1) c + \bar{D}_3 - D_3\,, \end{aligned}$$

и прибавить къ этому геометрически перемѣщеніе, полученное при первоначальномъ порядкѣ слагаемыхъ перемѣщеній.

При помощи предыдущихъ формулъ, которыя показываютъ, что въ общемъ случаѣ порядковое перемѣщеніе такого-же общаго характера, какъ и слагаемыя, разберемъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

37. Соединеніе чистыхъ деформацій.

Предположимъ, что одно изъ слагаемыхъ перемѣщеній, напр. первое, состоитъ изъ чистой деформаціи, и возьмемъ координатныя оси по главнымъ осямъ этой деформаціи. Тогда можно положить

$$(156)\quad \begin{gathered} A_1' = E_1',\ B_2' = E_2',\ C_3' = E_3', \\ B_1' = 0,\ C_1' = 0,\ D_1' = 0,\ A_2' = 0,\ C_2' = 0,\ D_2' = 0,. \\ A_3' = 0,\ B_3' = 0,\ D_3' = 0, \end{gathered}$$

и формулы (153), если принять во вниманіе сказанное по поводу формулъ (154), дадутъ:

$$
\begin{aligned}
&\bar{A}_1 - A_1 = 0,\\
&\bar{B}_1 - B_1 = (E_1' - E_2')\, B_1'',\\
&\bar{C}_1 - C_1 = (E_1' - E_3')\, C_1'',\\
&\bar{D}_1 - D_1 = (E_1' - 1)\, D_1'',\\
&\bar{A}_2 - A_2 = (E_2' - E_1')\, A_2'',\\
&\bar{B}_2 - B_2 = 0,\\
&\bar{C}_2 - C_2 = (E_2' - E_3')\, C_2'',\\
&\bar{D}_2 - D_2 = (E_2' - 1)\, D_2'',\\
&\bar{A}_3 - A_3 = (E_3' - E_1')\, A_3'',\\
&\bar{B}_3 - B_3 = (E_3' - E_2')\, B_3'',\\
&\bar{C}_3 - C_3 = 0,\\
&\bar{D}_3 - D_3 = (E_3' - 1)\, D_3''.
\end{aligned}
\qquad (157)
$$

Вліяніе порядка слагаемыхъ перемѣщеній, опредѣляемое формулами (157), выражается просто и наглядно въ томъ случаѣ, когда и второе изъ данныхъ перемѣщеній представляетъ собою чистую деформацію, т. е. когда

$$
C_2'' = B_3'',\ A_3'' = C_1'',\ B_3'' = A_2'',
$$
$$
D_1'' = 0,\ D_2'' = 0,\ D_3'' = 0,
$$

и поэтому

$$
\bar{D}_1 - D_1 = 0,\ \ \bar{D}_2 - D_2 = 0,\ \bar{D}_3 - D_3 = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{C}_2 - C_2 &= -(\bar{B}_3 - B_3),\\
\bar{A}_3 - A_3 &= -(\bar{C}_1 - C_1),\\
\bar{B}_1 - B_1 &= -(\bar{A}_2 - A_2).
\end{aligned}
$$

Означая эти величины соотвѣтственно черезъ $-h_1$, $-h_2$, $-h_3$, можно перемѣщеніе (155) представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$
\begin{aligned}
X &= a - h_3\, b + h_2\, c,\\
Y &= + h_3\, a + b - h_1\, c,\\
Z &= - h_2\, a + h_1\, b + c.
\end{aligned}
$$

Оно такого-же вида, какъ перемѣщеніе, разобранное въ § 26, т. е. для него эллипсоидъ удлиненій имѣетъ двѣ равныя оси, и оно сопровождается вращеніемъ на нѣкоторый уголъ около оси этого эллипсоида.

Обратно, если одно изъ слагаемыхъ перемѣщеній такого вида, какъ

сейчасъ упомянутое, то различіе въ перемѣщеніи, зависящее отъ измѣненія порядка, будетъ выражаться чистою деформаціею, ибо, если

$$C_2'' = -B_3'',\ A_3'' = -C_1'',\ B_1'' = -A_2'',$$

то

$$\begin{aligned} \bar{C}_2 - C_2 &= \bar{B}_3 - B_3\,, \\ \bar{A}_3 - A_3 &= \bar{C}_1 - C_1\,, \\ \bar{B}_1 - B_1 &= \bar{A}_2 - A_2\,. \end{aligned}$$

Формулы (157) показываютъ, что вліяніе порядка совсѣмъ исчезаетъ, если оси главныхъ удлиненій совпадаютъ или если первое изъ слагаемыхъ перемѣщеній состоитъ изъ однороднаго по всѣмъ направленіямъ расширенія.

Если оси двухъ чистыхъ деформацій и не совпадаютъ, то *во всякомъ случаѣ величины главныхъ удлиненій составнаго движенія не зависятъ отъ порядка перемѣщеній*[1]). Въ этомъ можно убѣдиться, составивъ по формуламъ (93) и (95) кубическое уравненіе для опредѣленія главныхъ удлиненій составнаго перемѣщенія. Выбирая координатныя оси, какъ это было сдѣлано въ началѣ этого §, и принимая во вниманіе формулы (156), имѣемъ:

$$(158)\qquad \begin{aligned} L_{11} &= E_1'^2(A_1''^2 + A_2''^2 + A_3''^2)\,, \\ L_{22} &= E_2'^2(B_1''^2 + B_2''^2 + B_3''^2)\,, \\ L_{33} &= E_3'^2(C_1''^2 + C_2''^2 + C_3''^2)\,, \\ L_{23} &= E_2'E_3'(B_1''C_1'' + B_2''C_2'' + B_3''C_3'')\,, \\ L_{31} &= E_3'E_1'(C_1''A_1'' + C_2''A_2'' + C_3''A_3'')\,, \\ L_{12} &= E_1'E_2'(A_1''B_1'' + A_2''B_2'' + A_3''B_3'')\,; \end{aligned}$$

$$(159)\qquad \begin{aligned} \bar{L}_{11} &= E_1'^2A_1''^2 + E_2'^2A_2''^2 + E_3'^2A_3''^2\,, \\ \bar{L}_{22} &= E_1'^2B_1''^2 + E_2'^2B_2''^2 + E_3'^2B_3''^2\,, \\ \bar{L}_{33} &= E_1'^2C_1''^2 + E_2'^2C_2''^2 + E_3'^2C_3''^2\,, \\ \bar{L}_{23} &= E_1'^2B_1''C_1'' + E_2'^2B_2''C_2'' + E_3'^2B_3''C_3''\,, \\ \bar{L}_{31} &= E_1'^2C_1''A_1'' + E_2'^2C_2''A_2'' + E_3'^2C_3''A_3''\,, \\ \bar{L}_{12} &= E_1'^2A_1''B_1'' + E_2'^2A_2''B_2'' + E_3'^2A_3''B_3''\,. \end{aligned}$$

---

[1]) См. Бобылевъ, Гидростатика и теорія упругости, стр. 73.

Корни кубическаго уравненія (95), опредѣляющіе собою квадраты главныхъ удлиненій, будутъ одинаковы при обоихъ порядкахъ слагаемыхъ перемѣщеній, если коэффиціенты этого уравненія будутъ соотвѣтственно равны, т. е. если

$$\bar{L}_{11} + \bar{L}_{22} + \bar{L}_{33} = L_{11} + L_{22} + L_{33},$$

$$\bar{L}_{23}^2 + \bar{L}_{31}^2 + \bar{L}_{12}^2 - \bar{L}_{22}\bar{L}_{33} - \bar{L}_{33}\bar{L}_{11} - \bar{L}_{11}\bar{L}_{22}$$
$$= L_{23}^2 + L_{31}^2 + L_{12}^2 - L_{22}L_{33} - L_{33}L_{11} - L_{11}L_{22},$$

$$\bar{L}_{11}\bar{L}_{22}\bar{L}_{33} - \bar{L}_{11}\bar{L}_{23}^2 - \bar{L}_{22}\bar{L}_{31}^2 - \bar{L}_{33}\bar{L}_{12}^2 + 2\bar{L}_{23}\bar{L}_{31}\bar{L}_{12}$$
$$= L_{11}L_{22}L_{33} - L_{11}L_{23}^2 - L_{22}L_{31}^2 - L_{33}L_{12}^2 + 2L_{23}L_{31}L_{12}.$$

Но легко видѣть, что эти равенства подтверждаются на основаніи формулъ (158) и (159), если принять во вниманіе, что при чистой деформаціи

$$C_2'' = B_3'', \quad A_3'' = C_1'', \quad B_1'' = A_2''.$$

38. Соединеніе перемѣщеній, содержащихъ сдвиганіе.

При соединеніи чистой деформаціи съ сдвиганіемъ порядокъ слагаемыхъ перемѣщеній тоже оказываетъ вліяніе. По формуламъ (104) теперь:

$$A_1'' = 1 + 2PStg\sigma, \quad B_1'' = 2QStg\sigma, \quad C_1'' = 2RStg\sigma, \quad D_1'' = 0,$$
$$A_2'' = 2PTtg\sigma, \quad B_2'' = 1 + 2QTtg\sigma, \quad C_2'' = 2RTtg\sigma, \quad D_2'' = 0,$$
$$A_3'' = 2PUtg\sigma, \quad B_3'' = 2QUtg\sigma, \quad C_3'' = 1 + 2RUtg\sigma, \quad D_3'' = 0;$$

поэтому уравненіе (155) принимаетъ видъ:

$$\begin{aligned} X &= a + 2Stg\sigma\,[Q(E_1' - E_2')b + R(E_1' - E_3')c], \\ Y &= b + 2Ttg\sigma\,[R(E_2' - E_3')c + P(E_2' - E_1')a], \\ Z &= c + 2Utg\sigma\,[P(E_3' - E_1')a + Q(E_3' - E_1')b]. \end{aligned} \qquad (160)$$

Въ частности, если основною плоскостью сдвиганія служитъ плоскость (xy), а направленіе сдвиганія параллельно оси y, то

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 1,$$
$$S = 0, \quad T = 1, \quad U = 0,$$

и формулы (160) даютъ:

$$X = a,$$
(161) $$Y = b + 2tg\sigma . (E_2' - E_3')c,$$
$$Z = c.$$

Въ „Natural Philosophy" Томсона и Тэта показывается (§ 177 —§ 179), какимъ образомъ сдвиганіе, удлиненіе по направленію, перпендикулярному къ плоскости сдвиганія, и общее расширеніе системы могутъ дать чистую деформацію. Въ этомъ специальномъ случаѣ порядокъ сдвиганія и удлиненія не оказываетъ вліянія на результатъ перемѣщеній; ибо, если сдвиганіе происходитъ въ плоскости (yz), какъ это предполагается въ формулахъ (161), то удлиненіе должно быть произведено по оси (x). А формулы (161) показываютъ, что координаты X, Y, Z отъ E_1 не зависятъ.

Обратимся теперь къ случаю, когда оба слагаемыя перемѣщенія состоятъ изъ простыхъ сдвиганій. Два сдвиганія, хотя-бы они производились параллельно одной и той-же плоскости, даютъ различный результатъ, смотря по тому, въ какомъ порядкѣ они будутъ произведены, если только направленія самыхъ раздвиганій при этомъ не совпадаютъ. Пусть будутъ K_1 и K_2 величины сдвиганій въ плоскости (yz), первое по оси (y), второе по оси (z); тогда можно написать:

$$x' = a \ , \quad y' = b + K_1 c \ , \quad z' = c,$$
$$x = x' \ , \quad y = y' \ , \quad z = z' + K_2 y',$$

и послѣднія три уравненія еще такъ:

$$x = a,$$
$$y = b + K_1 c,$$
$$z = c + K_2 b + K_1 K_2 c.$$

Формулы (155) теперь имѣютъ видъ:

$$X = a,$$
$$Y = b(1 + K_1 K_2),$$
$$Z = c(1 - K_1 K_2).$$

Отсюда

$$\sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2} = K_1 K_2 \sqrt{b^2+c^2},$$

$$\frac{Z-c}{Y-b} = -\frac{c}{b}. \qquad (162)$$

Такимъ образомъ разстоянія между положеніями одной и той-же точки, полученныя при двухъ различныхъ порядкахъ сдвиганій, пропорціональны первоначальнымъ разстояніямъ точки отъ оси, перпендикулярной къ плоскости обоихъ сдвиганій. Формула (162) указываетъ, въ какомъ направленіи нужно совершить переходъ отъ перваго положенія точки (x, y, z) ко второму $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Составляя уравненія порядковаго перемѣщенія (§ 28), получимъ теперь

$$\bar{x} = x,$$
$$\bar{y} = (1 + K_1 K_2 + K_1^2 K_2^2) y - K_1^2 K_2 z,$$
$$\bar{z} = K_1 K_2^2 y + (1 - K_1 K_2) z.$$

Отсюда видно, что два положенія системы различаются между собою перемѣщеніемъ, которое состоитъ изъ деформаціи, сопряженной съ вращеніемъ. Точно также мы видимъ, что два сдвиганія не могутъ быть замѣнены простымъ сдвиганіемъ, а къ этому присоединяется вращеніе [1]).

39. Соединеніе вращенія съ однородной деформаціей.

Если одно изъ перемѣщеній состоитъ изъ простаго вращенія, а другое перемѣщеніе общаго вида, то понятно само собою, что порядокъ перемѣщеній оказываетъ вліяніе на положеніе системы, такъ какъ уже при движеніи твердаго тѣла порядокъ конечныхъ вращеній вліяетъ на результатъ составнаго перемѣщенія. Разсмотримъ тотъ случай, когда второе перемѣщеніе представляетъ собою чистую деформацію, и предположимъ оси координатъ выбранными такъ, чтобы ось x совпадала съ осью даннаго вращенія, уголъ котораго означимъ черезъ φ. Тогда формулы (155) даютъ:

$$X = a + [g_3(1-\cos\varphi) - g_2 \sin\varphi] b + [g_2(1-\cos\varphi) + g_3 \sin\varphi] c,$$
$$Y = -[g_3(1-\cos\varphi) + g_2 \sin\varphi] a + (1 - 2g_1 \sin\varphi) b + (B_2'' - C_3'') \sin\varphi . c,$$
$$Z = -[g_2(1-\cos\varphi) - g_3 \sin\varphi] a + (B_2'' - C_3'') \sin\varphi . b + (1 + 2g_1 \sin\varphi) c.$$

---

[1]) Ibbetson Math. theory of elasticity, стр. 72.

Здѣсь для простоты положено:

$$C_2'' = B_3'' = g_1\,, \quad A_3'' = C_1'' = g_2\,, \quad B_1'' = A_2'' = g_3\,.$$

Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ вліяніе порядка выражается сложнымъ перемѣщеніемъ, состоящимъ изъ деформаціи и вращенія. Только *если*

$$g_2 = 0\,, \quad g_3 = 0\,,$$

т. е. *если одно изъ главныхъ удлиненій втораго слагаемаго перемѣщенія происходитъ по оси заданнаго вращенія, вліяніе порядка выражается чистою деформаціею:*

$$\begin{aligned} X &= a\,, \\ Y &= (1 - 2g_1 \sin\varphi)b + (B_2'' - C_3'')\sin\varphi\,.\,c\,, \\ Z &= (B_2'' - C_3'')\sin\varphi\,.\,b + (1 + 2g_1\sin\varphi)\,.\,c\,. \end{aligned}$$

При вращеніи, слагаемомъ съ сдвиганіемъ, вліяніе порядка выражается вообще говоря тоже перемѣщеніемъ, содержащимъ и деформацію и вращеніе. Если-же сдвиганіе K происходитъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія, то формулы (155) даютъ:

$$\begin{aligned} X &= a\,, \\ Y &= (1 - K\sin\varphi)b\,, \\ Z &= (1 + K\sin\varphi)c\,. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ вліяніе порядка опредѣляется двумя удлиненіями, изъ которыхъ одно происходитъ по направленію сдвиганія, а другое къ нему перпендикулярно.

Если сдвиганіе происходитъ въ плоскости, проходящей черезъ ось вращенія, то формулы (155) даютъ:

$$\begin{aligned} X &= a - K\sin\varphi\,.\,b + K(1-\cos\varphi)\,.\,c\,, \\ Y &= b\,, \\ Z &= c\,. \end{aligned} \qquad (163)$$

Эти уравненія выражаютъ собою сдвиганіе въ плоскости, проходящей черезъ данную ось вращенія. Это можно видѣть, сравнивая формулы (163) съ формулами (104) и полагая въ послѣднихъ:

$$P = 0, \quad T = 0, \quad U = 0, \quad 2tg\sigma = K$$

и слѣдовательно

$$S = 1, \quad Q = \cos\alpha\ , \quad R = \sin\alpha\ ,$$

гдѣ α — уголъ между плоскостью сдвиганія и плоскостью (xy). Теперь

$$2SQtg\sigma = -K\sin\varphi\ , \quad 2SRtg\sigma = K(1-\cos\varphi)\ ;$$

поэтому

$$tg\alpha = \frac{R}{Q} = -\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = -tg\frac{\varphi}{2}\,.$$

Такимъ образомъ плоскость сдвиганія составляетъ съ плоскостью (xy) уголъ, равный дополненію до двухъ прямыхъ къ половинѣ угла вращенія.

40. Кинематическіе элементы, изъ которыхъ слагается всякое перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы.

Пятнадцати коэффиціентамъ въ уравненіяхъ движенія коллинеарно-измѣняемой системы соотвѣтствуютъ 15 кинематическихъ элементовъ, изъ которыхъ всякое перемѣщеніе этой системы можетъ быть составлено:

3 поступательныхъ перемѣщенія,

3 вращенія,

3 удлиненія,

3 сдвиганія,

3 раздвиганія.

Дѣлая такое разложеніе перемѣщенія коллинеарно-измѣняемой системы, мы должны каждый разъ указывать, въ какомъ порядкѣ эти перемѣщенія производятся; потому-что, хотя они и могутъ быть производимы въ какомъ угодно порядкѣ, но элементы перемѣщеній, *если они не безконечно малы,* должны быть взяты различные при различныхъ порядкахъ. Въ этомъ насъ убѣждаетъ все сказанное въ предыдущихъ §§.

Только въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ порядокъ перемѣщеній не вліяетъ на ихъ результатъ. Къ такимъ случаямъ относятся слѣдующія соединенія перемѣщеній:

поступательныя съ поступательными, вращательное съ поступательнымъ, три вращенія, соотвѣтствующія измѣненію Эйлеровыхъ угловъ φ, ψ, θ, три взаимно-перпендикулярныхъ удлиненія, имѣющія общій центръ, три взаимно-перпендикулярныхъ раздвиганія, имѣющія общій центръ, три перемѣщенія, указанныя Томсономъ и Тэтомъ (см. § 38), и нѣкоторыя другія.



ГЛАВА III.

Скорости коллинеарно-измѣняемой системы.

41. Объ изученіи скоростей вообще.

Изученіе скоростей въ какой-либо сплошной измѣняемой системѣ сводится главнымъ образомъ къ рѣшенію двухъ слѣдующихъ основныхъ вопросовъ: 1) къ опредѣленію *скорости* какой-либо произвольно *заданной точки* и къ изслѣдованію *измѣненія* этой скорости *съ теченіемъ времени* или съ измѣненіемъ положенія этой точки въ пространствѣ; 2) къ изученію распредѣленія скоростей въ системѣ *въ* какой-нибудь *данный моментъ времени*, т. е. къ опредѣленію того, какъ *измѣняются* величина и направленіе *скорости при переходѣ отъ одной точки системы къ другой*, и къ нахожденію такихъ точекъ системы, скорости которыхъ имѣютъ какія-либо общія между собою свойства. Первый вопросъ ведетъ къ опредѣленію тѣхъ общихъ для всѣхъ точекъ элементовъ скоростей, по которымъ можно опредѣлить скорость всякой точки, зная ея координаты. Понятно, что эти элементы скоростей соотвѣтствуютъ кинематическимъ элементамъ, опредѣляющимъ конечную деформацію или вообще конечное перемѣщеніе системы. Второй вопросъ — о распредѣленіи скоростей, хотя и находится въ связи съ предыдущимъ, но можетъ быть изучаемъ и совершенно самостоятельно, такъ какъ результаты, къ которымъ онъ приводитъ, обусловливаются не столько кинематическими свойствами элементовъ деформаціи, какъ аналитическимъ видомъ тѣхъ функцій, которыми опредѣляются слагаемыя скоростей по координатнымъ параметрамъ.

42. Основныя формулы для скоростей въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы.

Чтобы составить выраженія для скоростей коллинеарно-измѣняемой системы, продифференцируемъ по t уравненія (5). Результатъ можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{(A_1' - \alpha' x)a + (B_1' - \beta' x)b + (C_1' - \gamma' x)c + D_1'}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},\\
v_y &= \frac{(A_2' - \alpha' y)a + (B_2' - \beta' y)b + (C_2' - \gamma' y)c + D_2'}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},\\
v_z &= \frac{(A_3' - \alpha' z)a + (B_3' - \beta' z)b + (C_3' - \gamma' z)c + D_3'}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1};
\end{aligned}
\tag{164}
$$

причемъ значки ($'$) введены здѣсь для обозначенія производныхъ по времени. Исключая отсюда окончательно начальныя координаты, мы замѣчаемъ, что числители выраженій (164) будутъ содержать координаты x, y, z въ двухъ измѣреніяхъ; знаменатели-же, которые на первый взглядъ должны были-бы быть линейными, на самомъ дѣлѣ вовсе координатъ x, y, z содержать не будутъ. Это видно прямо на основаніи зависимостей (13). Дѣйствительно, формулы (164), послѣ подстановки туда вмѣсто a, b, c ихъ выраженій (4), принимаютъ видъ:

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{x(px + qy + rz) + l_1 x + m_1 y + n_1 z + s_1}{Tx + Uy + Vz + W},\\
v_y &= \frac{y(px + qy + rz) + l_2 x + m_2 y + n_2 z + s_2}{Tx + Uy + Vz + W},\\
v_z &= \frac{z(px + qy + rz) + l_3 x + m_3 y + n_3 z + s_3}{Tx + Uy + Vz + W},
\end{aligned}
\tag{165}
$$

причемъ

$$
\begin{aligned}
T &= \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 + \lambda,\\
U &= \alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3 + \mu,\\
V &= \alpha G_1 + \beta G_2 + \gamma G_3 + \nu,
\end{aligned}
\tag{166}
$$

$$
W = \alpha H_1 + \beta H_2 + \gamma H_3 + 1. \tag{167}
$$

Выраженія (166) равны нулю на основаніи зависимостей (13); такимъ образомъ знаменатели формулъ (165) отъ координатъ не зависятъ.

Значеніе остальныхъ коэффиціентовъ слѣдующее:

$$(168)\qquad \begin{aligned} p &= -(\alpha' E_1 + \beta' E_2 + \gamma' E_3),\\ q &= -(\alpha' F_1 + \beta' F_2 + \gamma' F_3),\\ r &= -(\alpha' G_1 + \beta' G_2 + \gamma' G_3); \end{aligned}$$

$$(169)\qquad \begin{aligned} l_1 &= (A_1' E_1 + B_1' E_2 + C_1' E_3 + D_1'\lambda) - (\alpha' H_1 + \beta' H_2 + \gamma' H_3),\\ m_1 &= A_1' F_1 + B_1' F_2 + C_1' F_3 + D_1'\mu,\\ n_1 &= A_1' G_1 + B_1' G_2 + C_1' G_3 + D_1'\nu,\\ s_1 &= A_1' H_1 + B_1' H_2 + C_1' H_3 + D_1'; \end{aligned}$$

$$(170)\qquad \begin{aligned} l_2 &= A_2' E_1 + B_2' E_2 + C_2' E_3 + D_2'\lambda,\\ m_2 &= (A_2' F_1 + B_2' F_2 + C_2' F_3 + D_2'\mu) - (\alpha' H_1 + \beta' H_2 + \gamma' H_3),\\ n_2 &= A_2' G_1 + B_2' G_2 + C_2' G_3 + D_2'\nu,\\ s_2 &= A_2' H_1 + B_2' H_2 + C_2' H_3 + D_2'; \end{aligned}$$

$$(171)\qquad \begin{aligned} l_3 &= A_3' E_1 + B_3' E_2 + C_3' E_3 + D_3'\lambda,\\ m_3 &= A_3' F_1 + B_3' F_2 + C_3' F_3 + D_3'\mu,\\ n_3 &= (A_3' G_1 + B_3' G_2 + C_3' G_3 + D_3'\nu) - (\alpha' H_1 + \beta' H_2 + \gamma' H_3),\\ s_3 &= A_3' H_1 + B_3' H_2 + C_3' H_3 + D_3. \end{aligned}$$

Если положить еще для сокращенія

$$\begin{aligned} p = WP,\quad q = WQ,\quad r = WR,\\ l_1 = WL_1,\ \ldots\ldots,\ s_3 = WS_3, \end{aligned}$$

то формулы для скоростей будутъ окончательно слѣдующаго вида:

$$(172)\qquad \begin{aligned} v_x &= x(Px + Qy + Rz) + L_1 x + M_1 y + N_1 z + S_1,\\ v_y &= y(Px + Qy + Rz) + L_2 x + M_2 y + N_2 z + S_2,\\ v_z &= z(Px + Qy + Rz) + L_3 x + M_3 y + N_3 z + S_3. \end{aligned}$$

Эти формулы показываютъ, что скорость какой-либо точки коллинеарно-измѣняемой системы можно разсматривать составленною изъ двухъ скоростей, изъ которыхъ одна, v', имѣетъ своими проекціями:

$$(173)\qquad \begin{aligned} v_x' &= x(Px + Qy + Rz),\\ v_y' &= y(Px + Qy + Rz),\\ v_z' &= z(Px + Qy + Rz), \end{aligned}$$

т. е. функціи второй степени отъ координатъ, а другая, v'':

$$\begin{aligned} v_x'' &= L_1 x + M_1 y + N_1 z + S_1 , \\ v_y'' &= L_2 x + M_2 y + N_2 z + S_2 , \\ v_z'' &= L_3 x + M_3 y + N_3 z + S_3 , \end{aligned} \qquad (174)$$

линейныя функціи координатъ.

Нетрудно видѣть, что первыя слагаемыя опредѣляютъ скорость, зависящую исключительно отъ раздвиганій; потому-что v'' обратится въ нуль, если принять въ формулахъ (5) A_1, B_2, C_3' равными единицѣ, а остальные коэффиціенты, стоящіе въ числителяхъ этихъ формулъ, равными нулю, т. е. если формулы (5) предположить имѣющими видъ (70). Вторыя слагаемыя (174) опредѣляютъ скорость, которую имѣла-бы точка системы, если-бы послѣдняя была лишена раздвиганій; потому-что v' обращается въ нуль, если положить α, β, γ равными нулю. Отсюда видно, что при изученіи элементовъ скоростей можно отдѣлить чистое раздвиганіе отъ остальныхъ элементовъ перемѣщеній, соотвѣтствующихъ перемѣщенію системы какъ однородно-измѣняемой.

43. Скорости чистаго раздвиганія.

Формулы (168) и (167) показываютъ, что *въ случаѣ движенія, состоящаго изъ чистаго раздвиганія, коэффиціенты P, Q, R въ формулахъ* (173) *равны съ обратными знаками производнымъ по времени отъ слагаемыхъ по координатнымъ осямъ величины раздвиганія.* Въ этомъ можно убѣдиться непосредственно переходя къ скоростямъ отъ безконечно-малыхъ перемѣщеній. Разсматривая эти перемѣщенія происшедшими отъ безконечно-малаго раздвиганія, мы должны имѣть:

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}, \\ y + \Delta y &= \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}, \\ z + \Delta z &= \frac{z}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1}, \end{aligned} \qquad (175)$$

гдѣ α, β, γ суть безконечно-малые коэффиціенты раздвиганія. Съ другой стороны, дифференцируя по t уравненія (70) и подставляя потомъ

вмѣсто начальныхъ координатъ ихъ выраженія черезъ x, y, z, получимъ для проекцій скорости:

$$(176)\qquad \begin{aligned} v_x' &= -x(\lambda_x'x + \lambda_y'y + \lambda_z'z),\\ v_y' &= -y(\lambda_x'x + \lambda_y'y + \lambda_z'z),\\ v_z' &= -z(\lambda_x'x + \lambda_y'y + \lambda_z'z). \end{aligned}$$

Проекціи безконечно-малаго перемѣщенія точки, если пренебрегать величинами высшихъ порядковъ, будутъ поэтому:

$$(177)\qquad \begin{aligned} \Delta x &= -x(\Delta\lambda_x \,.\, x + \Delta\lambda_y \,.\, y + \Delta\lambda_z \,.\, z),\\ \Delta y &= -y(\Delta\lambda_x \,.\, x + \Delta\lambda_y \,.\, y + \Delta\lambda_z \,.\, z),\\ \Delta z &= -z(\Delta\lambda_x \,.\, x + \Delta\lambda_y \,.\, y + \Delta\lambda_z \,.\, z). \end{aligned}$$

Сравнивая формулы (175) и (177), мы имѣемъ зависимости:

$$\frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = x[1 - (\Delta\lambda_x \,.\, x + \Delta\lambda_y \,.\, y + \Delta\lambda_z \,.\, z)],$$

$$\frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = y[1 - (\Delta\lambda_x \,.\, x + \Delta\lambda_y \,.\, y + \Delta\lambda_z \,.\, z)],$$

$$\frac{z}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = z[1 - (\Delta\lambda_x \,.\, x + \Delta\lambda_y \,.\, y + \Delta\lambda_z \,.\, z)].$$

Но, пренебрегая безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ, можно написать:

$$\frac{1}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = 1 - (\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

и мы находимъ:

$$(178)\qquad \alpha = \Delta\lambda_x\ ,\quad \beta = \Delta\lambda_y\ ,\quad \gamma = \Delta\lambda_z.$$

$\sqrt{(\Delta\lambda_x)^2 + (\Delta\lambda_y)^2 + (\Delta\lambda_z)^2}$ будетъ поэтому величиною безконечно-малаго раздвиганія, а формулы (178) подтверждаютъ сказанное въ началѣ этого §. Будемъ называть предѣлъ отношенія величины безконечно-малаго раздвиганія къ соотвѣтственному элементу времени *скоростью раз-*

двиганія. Согласно этому опредѣленію, скорость раздвиганія должна измѣряться величиною

$$\tau = \sqrt{\lambda_x'^2 + \lambda_y'^2 + \lambda_z'^2}\,. \tag{179}$$

Такимъ образомъ λ_x', λ_y', λ_z' суть скорости слагаемыхъ раздвиганій по координатнымъ осямъ. Изображая скорость раздвиганія въ видѣ вектора, отложеннаго отъ центра раздвиганія по направленію, косинусы угловъ котораго съ осями координатъ пропорціональны величинамъ λ_x', λ_y', λ_z', можно эти величины назвать *проекціями скорости раздвиганія на координатныхъ осяхъ.* При указанномъ способѣ изображенія скорости раздвиганія, если означить черезъ ρ векторъ, проведенный изъ центра раздвиганія къ точкѣ (x, y, z), то скорость всякой точки можно по формулѣ (176) выразить такъ:

$$v' = \rho^2 \,.\, \tau \,.\, \cos(\rho, \tau); \tag{180}$$

т. е. *скорость всякой точки равна квадрату вектора, проведеннаго къ ней изъ центра раздвиганій, умноженному на проекцію скорости раздвиганія на направленіе этого вектора.*

Далѣе легко видѣть, что если безконечно-малое раздвиганіе разложить на раздвиганія по направленіямъ координатныхъ осей со скоростями λ_x', λ_y', λ_z', то скорости какой-нибудь точки системы, зависящія отъ отдѣльныхъ этихъ раздвиганій, будутъ лежать на одной прямой и будутъ имѣть значенія:

$$\rho \,.\, \lambda_x' \,.\, x, \quad \rho \,.\, \lambda_y' \,.\, y, \quad \rho \,.\, \lambda_z' \,.\, z,$$

а скорость точки, зависящая отъ полнаго раздвиганія, будетъ *алгебраической* суммою этихъ трехъ скоростей.

Нужно впрочемъ замѣтить, что предыдущія разсужденія относятся только къ такому движенію системы, которое состоитъ изъ чистаго раздвиганія. Въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы формулы (168), опредѣляющія скорость раздвиганія, содержатъ коэффиціенты, соотвѣтствующіе движенію системы, какъ однородно-измѣняемой. Точно такъ-же формулы (169), (171) и (172), соотвѣтствующія скоростямъ однородно-измѣняемой системы, содержатъ коэффиціенты раздвиганія.

44. Элементы скоростей, соотвѣтствующіе движенію системы какъ однородно-измѣняемой. Скорости удлиненія.

Хотя все, касающееся этого вопроса, хорошо изучено и излагается въ различныхъ сочиненіяхъ по гидродинамикѣ и теоріи упругости въ примѣненіи къ безконечно-малому элементу какого-нибудь измѣняемаго тѣла, мы приведемъ главнѣйшіе относящіеся сюда результаты какъ для полноты, такъ и для того, чтобы въ дальнѣйшемъ удобнѣе было дѣлать необходимыя ссылки.

Скоростью удлиненія, ε, какого-нибудь вектора ρ, принадлежащаго однородно-измѣняемой системѣ, называется предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія его длины, дѣленнаго на эту длину, къ соотвѣтственному элементу времени. По этому опредѣленію

(181) $$\varepsilon = \textit{пред.}\ \frac{\Delta\rho}{\rho\,.\,\Delta t} = \frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{dt}.$$

При опредѣленіи удлиненія мы можемъ предполагать, что движеніе однородно-измѣняемой системы происходитъ безъ поступательнаго перемѣщенія и неподвижная точка системы находится въ началѣ координатъ. Такъ какъ тогда D_1, D_2, D_3 и H_1, H_2, H_3 равны нулю, то формулы (169), (170) и (171) даютъ:

$$s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0,\ W = 1,$$

и для скоростей однородно-измѣняемой системы имѣемъ уравненія:

(182) $$\begin{aligned} v_x &= L_1x + M_1y + N_1z, \\ v_y &= L_2x + M_2y + N_2z, \\ v_z &= L_3x + M_3y + N_3z. \end{aligned}$$

Отсюда, принявъ во вниманіе, что

$$\Delta\rho = \frac{x\,.\,\Delta x + y\,.\,\Delta y + z\,.\,\Delta z}{\rho},$$

находимъ:

(183) $$\varepsilon = \frac{1}{\rho^2}\,(xv_x + yv_y + zv_z)$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\,[L_1x^2 + M_2y^2 + N_3z^2 + (N_2 + M_3)\,yz + (L_3 + N_1)zx + (M_1 + L_2)xy].$$

Для векторовъ, совпадающихъ съ координатными осями, нужно послѣдовательно положить

$$y = 0,\ z = 0;\quad z = 0,\ x = 0;\quad x = 0,\ y = 0.$$

Тогда, означая скорости удлиненія этихъ векторовъ черезъ ε_1, ε_2, ε_3, находимъ:

$$\varepsilon_1 = L_1,\ \varepsilon_2 = M_2,\ \varepsilon_3 = N_3.$$

Такъ какъ по основному свойству однородно-измѣняемой системы (§ 4) всякія прямыя, параллельныя между собою, остаются параллельными во всякое время движенія, то скорости удлиненія всякихъ параллельныхъ между собою векторовъ равны, и L_1, M_2, N_3 *представляютъ собою скорости удлиненія векторовъ, параллельныхъ координатнымъ осямъ.*

Если движеніе системы состоитъ только изъ чистой деформаціи, главныя оси которой совпадаютъ съ координатными, то формулы (169), (170) и (171) даютъ

$$M_1 = 0,\ N_1 = 0,\ L_2 = 0,\ N_2 = 0,\ L_3 = 0,\ M_3 = 0,$$

и уравненіе (183) принимаетъ видъ:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2}{\rho^2}. \tag{184}$$

Распредѣленіе скоростей удлиненій по различнымъ направленіямъ можетъ быть всегда приведено къ разсмотрѣнію формулъ (184). А именно, полагая

$$\frac{x}{\rho} = \cos\alpha,\quad \frac{y}{\rho} = \cos\beta,\quad \frac{z}{\rho} = \cos\gamma,$$

можно написать:

$$\varepsilon = L_1 \cos^2\alpha + M_2 \cos^2\beta + N_3 \cos^2\gamma$$
$$+ (N_2 + M_3) \cos\beta . \cos\gamma + (L_3 + N_1) \cos\gamma . \cos\alpha + (M_1 + L_2) \cos\alpha . \cos\beta.$$

Эта формула можетъ служить для опредѣленія скорости удлиненія по какому-нибудь данному направленію (α, β, γ). Она можетъ быть упрощена приличнымъ выборомъ координатныхъ осей. Дѣлая этотъ выборъ

извѣстнымъ изъ аналитической геометріи способомъ, мы можемъ написать:

$$\varepsilon = L_1' \cos^2\alpha' + M_2' \cos^2\beta' + N_3' \cos^2\gamma',$$

гдѣ L_1' M_2' N_3' суть измѣненныя преобразованіемъ координатъ значенія коэффиціентовъ, а α', β', γ' углы, составляемые векторомъ ρ съ новыми осями. Давая ρ послѣдовательно направленія новыхъ координатныхъ осей, чтобы найти кинематическое значеніе новыхъ коэффиціентовъ, мы увидимъ, что эти коэффиціенты суть скорости удлиненій по новымъ координатнымъ осямъ. Означая ихъ теперь черезъ ε_1' ε_2' ε_3', мы можемъ написать:

(185) $$\varepsilon = \varepsilon_1' \cos^2\alpha' + \varepsilon_2' \cos^2\beta' + \varepsilon_3' \cos^2\gamma'.$$

Эта формула тождественна по виду съ (184).

При изученіи распредѣленія скоростей удлиненій полезно разсматривать поверхность, называемую *деформатриссою.* Чтобы опредѣлить эту поверхность, отложимъ изъ начала координатъ векторъ z, величина котораго опредѣляется зависимостью

$$z = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

а направленіе совпадаетъ съ направленіемъ даннаго вектора ρ. Концы всѣхъ такихъ векторовъ z будутъ тогда, какъ показываетъ формула (183), лежать на поверхности втораго порядка съ центромъ:

$$L_1x^2 + M_2y^2 + N_3z^2 + (N_2 + M_3)yz + (L_3 + N_1)zx + (M_1 + L_2)xy = 1.$$

Это уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = 1,$$

если оси координатъ выбрать такъ, какъ это сдѣлано въ формулѣ (185). Такимъ образомъ законъ распредѣленія удлиненій можетъ быть выраженъ слѣдующею теоремою, принадлежащею *Коши*: *Скорость удлиненія, происходящаго въ однородно-измѣняемой системѣ по какому-либо направленію, обратно-пропорціональна квадрату вектора, проведеннаго параллельно данному направленію изъ центра нѣко-*

торой поверхности втораго порядка. Эта поверхность и называется деформатриссою.

Разсматриванiе деформатриссы полезно между прочимъ въ томъ отношенiи, что позволяетъ различныя свойства поверхностей втораго порядка непосредственно прилагать къ вопросамъ объ удлиненiяхъ; для этого нужно только принять во вниманiе, что полуоси (дѣйствительныя или мнимыя) этой поверхности суть величины обратныя квадратнымъ корнямъ изъ скоростей главныхъ удлиненiй. Одно изъ наиболѣе важныхъ приложенiй такого рода заключается въ слѣдующемъ. Извѣстно, что сумма квадратовъ величинъ, обратныхъ тремъ взаимно-перпендикулярнымъ векторамъ, проведеннымъ изъ центра поверхности втораго порядка, есть величина постоянная и равна суммѣ квадратовъ величинъ, обратныхъ полуосямъ этой поверхности. Прилагая это къ деформатриссѣ, мы непосредственно находимъ, что сумма скоростей удлиненiй по тремъ взаимно-перпендикулярнымъ направленiямъ есть величина постоянная и равна суммѣ скоростей трехъ главныхъ удлиненiй, т. е. $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Ограничиваясь здѣсь по отношенiю къ вопросамъ объ однородно-измѣняемой системѣ только самымъ существеннымъ, отсылаемъ читателя къ сочиненiямъ, цитированнымъ въ § 18, въ которыхъ (главнымъ образомъ въ „Кинематикѣ жидкаго тѣла“ Жуковскаго) вопросъ о скоростяхъ удлиненiй разобранъ обстоятельно.

По поводу скоростей удлиненiй замѣтимъ еще, что въ чистомъ *раздвиганiи* коллинеарно-измѣняемой системы *скорость удлиненiя вектора, проведеннаго изъ центра раздвиганiя зависитъ уже отъ длины вектора.* Въ этомъ заключается одно изъ существенныхъ отличiй коллинеарно-измѣняемой системы отъ однородно-измѣняемой. Дѣйствительно, опредѣляя скорость удлиненiя подобно тому, какъ это выше сдѣлано для однородно-измѣняемой системы, мы получимъ:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{(x^2+y^2+z^2)(Px+Qy+Rz)}{\rho^2} \tag{186}$$

$$= Px + Qy + Rz = \rho\,.\,\tau\,.\,\cos(\rho,\tau).\qquad ^{1)}.$$

---

[1]) Сравнить съ формулою (180).

Такимъ образомъ *для вектора, проведеннаго изъ центра раздвиганій, скорость удлиненія опредѣляется произведеніемъ скорости раздвиганія на проекцію вектора на направленіе раздвиганія.* Итакъ скорость удлиненія различна для различныхъ точекъ одного и того-же вектора. Она одинакова для точекъ, лежащихъ въ плоскостяхъ

$$Px + Qy + Rz = \textit{пост.},$$

перпендикулярныхъ къ скорости раздвиганія.

45. Скорости сдвиганія.

Разсмотримъ скорости въ движеніи, состоящемъ изъ простаго сдвиганія въ плоскости (yz) параллельно оси (y). Называя скоростью сдвиганія предѣлъ отношенія безконечно-малой величины сдвиганія къ соотвѣтственному элементу времени, мы найдемъ, что скорость въ такомъ движеніи будетъ:

(187) $$v = 2k_1 z,$$

гдѣ $2k_1$ скорость сдвиганія.

Извѣстно (§ 25), что сдвиганіе сопровождается вращеніемъ осей деформаціи около оси сдвиганія на уголъ, тангенсъ котораго равенъ половинѣ сдвиганія. Разсматривая безконечно-малое сдвиганіе, мы можемъ тангенсъ замѣнить самымъ угломъ, откуда видимъ, что угловая скорость вращенія, сопровождающаго сдвиганіе и происходящаго въ ту-же сторону, какъ происходитъ сдвиганіе, будетъ равна k_1. Скорость точки, зависящая отъ этого вращенія, будетъ имѣть своими проекціями на осяхъ координатъ:

$$0, \quad k_1 z, \quad -k_1 y.$$

Если эту скорость вычесть геометрически изъ скорости (187), то получится скорость, соотвѣтствующая чистому сдвиганію, не сопровождающемуся вращеніемъ осей деформаціи; эта скорость будетъ имѣть своими проекціями на координатныхъ осяхъ величины

$$0, \quad k_1 z, \quad k_1 y.$$

Разсматривая далѣе сдвиганіе со скоростью $2k_2$ въ плоскости (zx) по направленію оси (z) и отнимая отъ него происходящее при этомъ вращеніе, мы найдемъ подобно предыдущему, что это сдвиганіе имѣетъ своими проекціями на осяхъ координатъ величины:

$$k_2z,\quad 0,\quad k_2x.$$

Точно такъ-же мы увидимъ, что въ чистомъ сдвиганіи въ плоскости (xy) параллельно оси (x) со скоростью $2k_3$ скорость данной точки будетъ имѣть своими проекціями величины

$$k_3y,\quad k_3x,\quad 0.$$

Разсмотримъ теперь движеніе однородно-измѣняемой системы, состоящее изъ трехъ безконечно-малыхъ разсмотрѣнныхъ выше сдвиганій[1]). Въ такомъ движеніи скорость какой-нибудь точки системы будетъ имѣть своими проекціями на координатныхъ осяхъ:

$$k_2z + k_3y,\quad k_3x + k_1z,\quad k_1y + k_2x. \tag{188}$$

Скорость k сдвиганія, происходящаго въ какой-нибудь произвольно взятой плоскости, проходящей черезъ центръ деформаціи, *не можетъ быть разсматриваема составленною изъ трехъ скоростей сдвиганія по координатнымъ осямъ*. Чтобы въ этомъ убѣдиться, возьмемъ сдвиганіе со скорости k въ плоскости (yz) по направленію оси (y) и перемѣнимъ потомъ произвольнымъ образомъ направленіе координатныхъ осей, сохраняя только ихъ ортогональность. Скорости точекъ системы при первоначальномъ направленіи осей опредѣляются формулами:

$$v_x = 0,\ v_y = kz,\ v_z = ky.$$

Если $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ будутъ косинусы угловъ, образуемыхъ прежними осями $(x\ y\ z)$ съ ихъ новыми направленіями $(x'\ y'\ z')$, то, дѣлая преобразованіе координатъ, получимъ:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1v_x' + \beta_1v_y' + \gamma_1v_z' = 0,\\
&\alpha_2v_x' + \beta_2v_y' + \gamma_2v_z' = k\ (\alpha_3x' + \beta_3y' + \gamma_3z'),\\
&\alpha_3v_x' + \beta_3v_y' + \gamma_3v_z' = k\ (\alpha_2x' + \beta_2y' + \gamma_2z').
\end{aligned}$$

Умножая эти уравненія послѣдовательно на $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ и складывая каждый разъ, получимъ:

---

[1]) При безконечно-малыхъ перемѣщеніяхъ порядокъ ихъ, какъ извѣстно, оказываетъ вліяніе, исчезающее въ сравненіи съ величинами самыхъ перемѣщеній.

$$(189)\qquad \begin{aligned} v_x' &= k_3'y' + k_2'z' + 2k\,\alpha_2\,\alpha_3\,x', \\ v_y' &= k_1'z' + k_3'x' + 2k\,\beta_2\,\beta_3\,y', \\ v_z' &= k_2'x' + k_1'y' + 2k\,\gamma_2\,\gamma_3\,z', \end{aligned}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} k_1' &= (\beta_2\,\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)\,k, \\ k_2' &= (\gamma_3\,\alpha_1 + \gamma_1\,\alpha_3)\,k, \\ k_3' &= (\alpha_1\,\beta_2 + \alpha_2\,\beta_1)\,k. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ сдвиганіе выражается теперь формулами чистой деформаціи, содержащей удлиненія по координатнымъ осямъ. Это можно было впрочемъ предвидѣть, ибо только векторы, лежащіе въ основной плоскости сдвиганія и въ плоскостяхъ, ей параллельныхъ, не претерпѣваютъ удлиненій. Сумма скоростей удлиненій, какъ показываютъ формулы (189), равна нулю.

Если два сдвиганія, оси которыхъ взаимно перпендикулярны, происходятъ по одному и тому-же направленію, то и скорости сложнаго движенія будутъ зависѣть отъ простаго сдвиганія, какъ это замѣчено Жуковскимъ [1]).

46. Кинематическое значеніе коэффиціентовъ въ общихъ формулахъ для скоростей коллинеарно-измѣняемой системы.

Изъ двухъ послѣднихъ §§ можно видѣть, что формулы:

$$(190)\qquad \begin{aligned} v_x &= \varepsilon_1 x + k_3 y + k_2 z, \\ v_y &= \varepsilon_2 y + k_1 z + k_2 x, \\ v_z &= \varepsilon_3 z + k_2 x + k_1 y \end{aligned}$$

опредѣляютъ проекціи скорости точки однородно-измѣняемой системы, движеніе которой состоитъ изъ трехъ удлиненій по координатнымъ осямъ и трехъ сдвиганій въ координатныхъ плоскостяхъ параллельно осямъ координатъ. Но такое движеніе однородно-измѣняемой системы представляетъ собою не что иное, какъ чистую деформацію, оси которой *не* совпадаютъ съ осями координатъ. Дѣйствительно, пусть будутъ (x, y, z) и $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ координаты точки M въ ея положеніяхъ въ моменты t и $t + \Delta t$. Если перемѣщеніе этой точки обусловливается лишь чистой деформаціей системы, то, на основаніи сказанна-

1) Кинематика жидкаго тѣла, стр. 29.

го въ § 20, между координатами x, y, z и $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ должны существовать зависимости вида:

$$x + \Delta x = q_1 x + my + nz,$$
$$y + \Delta y = mx + q_2 y + lz,$$
$$z + \Delta z = nx + ly + q_3 z,$$

причемъ $q_1 - 1$, $q_2 - 1$, $q_3 - 1$, l, m и n будутъ безконечно-малыми величинами. Отсюда находимъ:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{q_1 - 1}{\Delta t} \cdot x + \frac{m}{\Delta t} \cdot y + \frac{n}{\Delta t} \cdot z,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} \cdot x + \frac{q_2 - 1}{\Delta t} \cdot y + \frac{l}{\Delta t} \cdot z,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{n}{\Delta t} \cdot x + \frac{l}{\Delta t} \cdot y + \frac{q_3 - 1}{\Delta t} \cdot z$$

и, переходя къ предѣлу, получимъ для скоростей формулы такого-же вида, какъ формулы (190).

Чтобы получить скорости для общаго случая движенія коллинеарно-измѣняемой системы, нужно въ формулахъ (190) прибавить: 1) члены (176), опредѣляющіе скорость въ чистомъ раздвиганіи, 2) члены

$$qz - ry, \; rx - pz, \; py - qx, \tag{191}$$

соотвѣтствующіе вращательному движенію системы какъ неизмѣняемой, и 3) члены, независящіе отъ координатъ, какъ слагаемыя нѣкоторой поступательной скорости. Сравнивая полученныя такимъ образомъ формулы съ формулами (172), мы и можемъ опредѣлить кинематическое значеніе входящихъ въ эти послѣднія формулы коэффиціентовъ. Число этихъ коэффиціентовъ равно числу элементовъ, по которымъ опредѣляется скорость составленнаго нами выше сложнаго движенія коллинеарно-измѣняемой системы. Поэтому *въ самомъ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы скорость всякой ея точки можетъ быть разсматриваема составленною изъ скоростей, зависящихъ отъ раздвиганій, удлиненій, сдвиганій, вращеній и поступательныхъ перемѣщеній.* Сравненіе коэффиціентовъ даетъ для слагаемыхъ скоростей:

$$\lambda_x = -P,\ \lambda_y = -Q,\ \lambda_z = -R,$$

$$\varepsilon_1 = L_1,\ \varepsilon_2 = M_2,\ \varepsilon_3 = N_3,$$

$$(192)\quad k_1 = \tfrac{1}{2}(N_2 + M_3),\ k_2 = \tfrac{1}{2}(L_3 + N_1),\ k_3 = \tfrac{1}{2}(M_1 + L_2),$$

$$(193)\quad p = \tfrac{1}{2}(M_3 - N_2),\ q = \tfrac{1}{2}(N_1 - L_3),\ r = \tfrac{1}{2}(L_2 - M_1),$$

$$v_{ox} = S_1,\ v_{oy} = S_2,\ v_{oz} = S_3.$$

Формулы (192) и (193) принадлежатъ Cauchy.

Дѣлая такое сравненіе, нужно только помнить, что вообще говоря скорости раздвиганія зависятъ не отъ однѣхъ величинъ раздвиганій, но и отъ параметровъ, соотвѣтствующихъ однородно-измѣняемой системѣ; и, наоборотъ, скорости удлиненій, сдвиганій и вращеній зависятъ также и отъ величинъ раздвиганій и только тогда дѣлаются отъ нихъ независимыми, когда поступательныя слагаемыя движенія исчезаютъ. Скорости поступательнаго движенія также зависятъ и отъ другихъ элементовъ, соотвѣтствующихъ движенію системы какъ однородно-измѣняемой.

47. Распредѣленіе скоростей; частные случаи.

Опредѣливъ элементы, изъ которыхъ слагаются скорости въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы, перейдемъ ко второму изъ намѣченныхъ въ § 41 вопросовъ, — къ распредѣленію скоростей. Имѣя въ виду обратить главное вниманіе на общій случай, когда въ разсматриваемое движеніе входятъ всѣ составные элементы скоростей, указанные выше, мы ограничимся относительно *распредѣленія скоростей въ частныхъ случаяхъ* только немногими замѣчаніями.

Когда движеніе состоитъ изъ чистаго раздвиганія, распредѣленіе скоростей весьма просто. Мы знаемъ, что всѣ точки двигаются по прямымъ, проходящимъ черезъ центръ раздвиганій, и что, какъ уже указано въ § 43, въ формулѣ (180), скорость всякой точки пропорціональна квадрату вектора, проведеннаго къ ней изъ центра раздвиганій, и проекціи на этотъ векторъ скорости раздвиганія. Относительно распредѣленія величинъ скоростей для этого случая замѣтимъ только слѣдующее. Всѣ точки, лежащія въ плоскости, нормальной къ скорости раздвиганія и проходящей черезъ центръ раздвиганій, имѣютъ скорости, равныя нулю. Геометрическое мѣсто точекъ, скорости которыхъ равны, опредѣляется поверхностью четвертаго порядка:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(\lambda_x' x + \lambda_y' y + \lambda_z' z)^2 = C^2.$$

Эта поверхность имѣетъ свойство, что для всѣхъ ея точекъ произведеніе вектора, проведеннаго изъ центра раздвиганій на направленіе нормали къ плоскости нулевыхъ скоростей, есть величина постоянная.

Въ § 44 было уже замѣчено, что въ чистомъ раздвиганіи скорость удлиненія какого-нибудь вектора не одна и та-же при различной длинѣ вектора [формула (186)]. Влѣдствіе этого *скорость удлиненія векторовъ, не проходящихъ черезъ центръ раздвиганій, зависитъ нетолько отъ ихъ направленія и длины, но также и отъ ихъ положенія.* Пусть будетъ

$$M_1 M_2 = \rho$$

такой векторъ, x_1, y_1, z_1, и x_2, y_2, z_2 координаты его концовъ. Такъ какъ по извѣстному свойству векторовъ

$$\frac{d\rho}{dt} = v_2 \cdot \cos(v_2\rho) - v_1 \cos(v_1\rho),$$

гдѣ v_1 и v_2 скорости точекъ M_1 и M_2, то мы имѣемъ

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho}\,[\, v_{2x}\cos(\rho x) + v_{2y}\cos(\rho y) + v_{2z}\cos(\rho z)$$

$$- v_{1x}\cos(\rho x) - v_{1y}\cos(\rho y) - v_{1z}\cos(\rho z)\,]$$

$$= \frac{1}{\rho}\,[\,(Px_2 + Qy_2 + Rz_2)\,\rho_2\cos(\rho_2\rho) - (Px_1 + Qy_1 + Rz_1)\,\rho_1\cos(\rho_1\rho)\,]$$

$$= \frac{\tau}{\rho}\,[\,\rho_2^2\cos(\rho_2\rho)\cos(\rho_2\tau) - \rho_1^2\cos(\rho_1\rho)\cos(\rho_1\tau)\,].$$

Распредѣленіе скоростей для случая, когда коллинеарно-измѣняемая система превращается въ однородно-измѣняемую, подробно изучено у Durrande'a[1]) и у Жуковскаго[2]). Мы не будемъ поэтому воспроизводить здѣсь этихъ изслѣдованій, тѣмъ болѣе, что съ нѣкоторыми резуль-

---

[1]) Essai sur le dèplacement d'une figure de forme variable. Journal Scientifique de l'École Normale, (2) II, стр. 81.

[2]) Кинематика жидкаго тѣла.

татами мы еще встрѣтимся, изучая распредѣленіе скоростей для общаго случая движенія коллинеарно-измѣняемой системы; теперь-же ограничимся слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Какъ извѣстно, при изученіи распредѣленія скоростей однородно-измѣняемой системы важную роль играетъ функція, названная Гельмгольцемъ потенціаломъ скоростей. Въ однородно-измѣняемой системѣ потенціалъ скоростей существуетъ въ томъ случаѣ, когда ея движеніе не сопровождается вращеніемъ главныхъ осей удлиненія и въ частности когда движеніе состоитъ изъ удлиненій по координатнымъ осямъ или изъ сдвиганій въ координатныхъ плоскостяхъ.

Въ случаѣ чистаго раздвиганія коллинеарно-измѣняемой системы такого *потенціала скоростей существовать не можетъ,* ибо условіе, чтобы

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

было полнымъ дифференціаломъ для чистаго раздвиганія не выполняется: формулы (173) даютъ

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = yR, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial y} = zQ,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = zP, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial z} = xR,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = xQ, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x} = yP,$$

и разности

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

не могутъ для всѣхъ точекъ системы равняться нулю, если раздвиганіе существуетъ. Такимъ образомъ при изученіи распредѣленія скоростей въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы разсматриваніе потенціала скоростей не приложимо.

48. Общія замѣчанія относительно изученія распредѣленія скоростей въ измѣняемыхъ системахъ.

Для изученія распредѣленія скоростей въ неизмѣняемой системѣ Chasles далъ особую методу, состоящую главнымъ образомъ въ раз-

сматриваніи *характеристики* и *фокуса* плоскости[1]) и развитую потомъ подробнѣе Mannheim'омъ[2]). Въ приложеніи къ системѣ однородно-измѣняемой эта метода была примѣняема Durrande'омъ[3]) и Жуковскимъ[4]). Метода Chasles'я представляетъ весьма удобное средство для изученія распредѣленія скоростей *въ какой-либо измѣняемой системѣ*, если ее надлежащимъ образомъ обобщить, замѣнивъ характеристику и фокусъ плоскости характеристикою и фокусомъ какой-либо поверхности, какъ это было предложено Durrande'омъ[5]).

Мы приведемъ эту методу въ сжатомъ видѣ, такъ какъ намъ придется этой методой отчасти воспользоваться въ примѣненіи къ коллинеарно-измѣняемой системѣ.

Пусть будутъ

$$\begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t), \\ y &= f_2(a, b, c, t), \\ z &= f_3(a, b, c, t) \end{aligned} \tag{194}$$

уравненія, опредѣляющія движеніе какой-нибудь измѣняемой системы, причемъ a, b, c — начальныя координаты какой-либо ея точки. Формулы:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial f_1(a, b, c, t)}{dt}, \\ v_y &= \frac{\partial f_2(a, b, c, t)}{dt}, \\ v_z &= \frac{\partial f_3(a, b, c, t)}{dt} \end{aligned} \tag{195}$$

могутъ служить для опредѣленія измѣненія съ теченіемъ времени скорости точки, заданной своимъ начальнымъ положеніемъ. Желая-же изучать распредѣленіе скоростей въ данный моментъ, мы должны составить формулы, по которымъ можно было-бы опредѣлить скорость каж-

---

[1]) Comptes rendus, t. III.

[2]) Mémoires de l'Institut, t. XX.

[3]) Comptes rendus, t. LXXIII, 736 и t. LXXIV, 1243.

[4]) Кинематика жидкаго тѣла.

[5]) Essai sur le dèplacement d'une figure de forme variable. Journ. Scient. de l'École Norm. (2) II.

дой точки системы по положенію этой точки въ разсматриваемый моментъ времени. Такія формулы очевидно получатся, если изъ уравненій (195) исключить координаты a, b, c при помощи уравненій (194); онѣ будутъ имѣть видъ:

$$
\begin{aligned}
v_x &= \varphi_1(x, y, z, t), \\
v_y &= \varphi_2(x, y, z, t), \\
v_z &= \varphi_3(x, y, z, t).
\end{aligned} \tag{196}
$$

Можно двоякимъ образомъ составить себѣ понятіе о распредѣленіи скоростей въ системѣ. Первый способъ состоитъ въ томъ, что выбирается опредѣленная совокупность точекъ, образующихъ нѣкоторую поверхность или линію, принадлежащую системѣ, и изучается распредѣленіе скоростей въ этихъ точкахъ. Измѣняя потомъ параметры поверхности или линіи, мы можемъ постепенно опредѣлить распредѣленіе скоростей во всей измѣняемой системѣ. Второй пріемъ состоитъ въ томъ, что задается нѣкоторое условіе, которому должны удовлетворять скорости, и потомъ отыскиваются точки системы, для которыхъ это условіе выполняется.

Совокупность этихъ пріемовъ даетъ всегда болѣе ясное представленіе о распредѣленіи скоростей, чѣмъ одинъ изъ нихъ, взятый отдѣльно.

49. Пріемъ Chasles'я—Mannheim'a—Durrande'a.

Обращаясь сначала къ первому пріему, мы должны выбрать въ системѣ такую поверхность или такую линію, на которой распредѣленіе скоростей выражалось-бы по возможности просто. Иногда по свойству измѣняемой системы можно предугадать видъ такой поверхности или линіи. Если-же это затруднительно, то естественно выбрать одну изъ наиболѣе простыхъ при данной координатной системѣ поверхностей. Пусть будетъ

$$\Phi(x, y, z, h) = 0 \tag{197}$$

уравненіе выбранной нами поверхности, гдѣ h тотъ параметръ, который мы должны измѣнять, чтобы принять во вниманіе всѣ точки системы.

Обращаясь сначала къ направленію скоростей и предполагая, что x, y, z суть прямоугольныя координаты, опредѣлимъ уголъ λ, который составляетъ скорость точки (x, y, z), лежащей на поверхности (197),

съ нормалью къ этой поверхности въ этой точкѣ. Мы его получимъ по формулѣ:

$$\cos\lambda = \frac{v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\pm v \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}. \tag{198}$$

Для точки, скорость которой касательная къ поверхности, получаемъ условіе:

$$v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0\,; \tag{199}$$

это условіе въ совокупности съ уравненіемъ (197) опредѣляетъ геометрическое мѣсто точекъ, лежащихъ въ данной поверхности, которыя перемѣщаются въ безконечно-малый элементъ времени по касательной къ поверхности. Это геометрическое мѣсто, которое будетъ вообще говоря кривою линіей, будемъ называть *характеристикою* данной поверхности.

Для точекъ, скорости которыхъ имѣютъ направленіе нормали къ поверхности, существуютъ условія:

$$\frac{v_x}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{v_y}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{v_z}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}, \tag{200}$$

которыя въ совокупности съ уравненіемъ (197) опредѣляютъ вообще говоря одну или нѣсколько отдѣльныхъ точекъ, лежащихъ на данной поверхности. Эти точки мы будемъ называть *фокусами* поверхности.

Характеристика и фокусъ даютъ представленіе о томъ, какъ двигаются точки заданной поверхности. Характеристика отдѣляетъ вообще говоря точки, выходящія въ одну сторону поверхности, отъ точекъ, выходящихъ по другую ея сторону.

Измѣняя параметръ h въ уравненіи (197), мы получимъ цѣлый рядъ характеристикъ и фокусовъ, которые будутъ образовать соотвѣтственно *поверхность характеристикъ* и *линію фокусовъ*. Уравненіе поверхности характеристикъ мы получимъ, исключивъ h изъ уравненій

(197) и (199), — а линію фокусовъ, исключивъ h изъ (197) и (200). Въ частности, если уравненіе (197) будетъ взято въ видѣ:

$$f(x, y, z) - h = 0,$$

то $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ не будутъ зависѣть отъ h, и слѣдовательно тогда уравненія (199) и (200) и будутъ соотвѣтственно поверхностью характеристикъ и линіею фокусовъ.

Точки пересѣченія поверхности характеристикъ и линіи фокусовъ суть такія точки системы, скорость которыхъ въ данный моментъ равна нулю; потому-что это такія точки, скорость которыхъ направлена одновременно и вдоль поверхности, и нормально къ ней: а это возможно только въ предположеніи, что скорость равна нулю.

Можетъ случиться, что поверхность характеристикъ и линія фокусовъ вовсе не пересѣкаются; это будетъ показывать, что въ данный моментъ въ измѣняемой системѣ не существуетъ точекъ, имѣющихъ скорость, равную нулю.

Можетъ также случиться, что линія фокусовъ лежитъ на поверхности характеристикъ. Въ этомъ случаѣ существуетъ цѣлая линія точекъ со скоростями, равными нулю.

Наконецъ можетъ существовать цѣлая поверхность, точки которой имѣютъ скорость, равную нулю. Это будетъ въ томъ случаѣ, если одно изъ трехъ уравненій (197) и (200) есть слѣдствіе двухъ остальныхъ, т. е. если на данной поверхности существуютъ не отдѣльные фокусы, а цѣлыя линіи ихъ. Тогда вмѣсто линіи фокусовъ будетъ существовать уже *поверхность фокусовъ*, и, если эта поверхность совпадаетъ съ поверхностью характеристикъ, мы получимъ новерхность, точки которой имѣютъ скорость, равную нулю.

Относительно характеристикъ замѣтимъ еще слѣдующее. Разсматривая положеніе данной поверхности въ различные моменты при одномъ и томъ-же опредѣленномъ h, мы получаемъ для каждаго ея положенія характеристику; всѣ характеристики образуютъ поверхность, которая отличается отъ поверхности характеристикъ, указанной выше. Эта новая поверхность есть не что иное, какъ поверхность, огибаемая движеніемъ данной поверхности.

Положенія въ данный моментъ точекъ системы, скорости которыхъ

равны нулю, очевидно не зависитъ отъ вида поверхности (197), для которой мы находили характеристики и фокусы. Поэтому, замѣняя эту поверхность какою-либо другою, мы получимъ новую поверхность характеристикъ и новую линію фокусовъ, которыя подобно предыдущимъ могутъ пересѣкаться только въ точкахъ, имѣющихъ скорость, равную нулю. Такимъ образомъ *всевозможныя поверхности характеристикъ и линіи фокусовъ имѣютъ однѣ и тѣ-же общія точки—точки нулевыхъ скоростей.* Эти точки, играющія важную роль въ вопросѣ о распредѣленіи скоростей, условимся называть *центрами скоростей.*

50. Другой пріемъ для изученія распредѣленія скоростей.

Обращаясь ко второму пріему для изученія скоростей, опредѣлимъ точки системы, скорости которыхъ имѣютъ данную величину или данное направленіе. И здѣсь на первомъ мѣстѣ стоятъ центры скоростей. Координаты ихъ должны удовлетворять условіямъ:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, t) &= 0, \\ \varphi_2(x, y, z, t) &= 0, \\ \varphi_3(x, y, z, t) &= 0. \end{aligned} \tag{201}$$

Такимъ образомъ число точекъ, имѣющихъ въ данный моментъ скорость, равную нулю, опредѣляется числомъ рѣшеній, которыя даютъ уравненія (201) для x, y, z. Можетъ случиться, что всѣ рѣшенія мнимыя; тогда центровъ скоростей въ данный моментъ не существуетъ. Можетъ также случиться, что одно изъ уравненій (201) есть слѣдствіе двухъ остальныхъ; въ этомъ случаѣ существуетъ безчисленное множество центровъ скоростей, образующихъ сплошную линію. Если наконецъ всѣ три уравненія тожественны между собою, то центры скоростей образуютъ сплошную поверхность. Всѣ эти случаи могутъ имѣть мѣсто въ коллинеарно-измѣняемой системѣ и ея частныхъ видахъ.

Пусть будутъ λ_1, λ_2, λ_3 углы, образуемые нѣкоторымъ заданнымъ направленіемъ съ осями координатъ. Точки, скорости которыхъ имѣютъ это направленіе, опредѣляются изъ уравненій:

$$\frac{\varphi_1(x, y, z, t)}{\cos\lambda_1} = \frac{\varphi_2(x, y, z, t)}{\cos\lambda_2} = \frac{\varphi_3(x, y, z, t)}{\cos\lambda_3}. \tag{202}$$

Такимъ образомъ *точки измѣняемой системы, скорости которыхъ между собою параллельны, образуютъ въ системѣ нѣкоторую ли-*

нію. Линіи, получающіяся для различныхъ направленій, очевидно пересѣкаются всѣ между собою въ центрахъ скоростей.

Линію (202) можно разсматривать какъ предѣльный видъ *поверхности, точки которой имѣютъ скорости, одинаково наклоненныя къ данному направленію,* и уравненія которыхъ можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$(203)\quad \varphi_1 . \cos\lambda_1 + \varphi_2 \cos\lambda_2 + \varphi_3 \cos\lambda_3 = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2} \,.\, k,$$

гдѣ k постоянная величина, меньшая единицы.

Особеннаго вниманія заслуживаетъ тотъ случай, когда k равно нулю, т. е. когда *точки поверхности* (203) *имѣютъ скорости, перпендикулярныя къ данному направленію,* слѣдовательно *параллельныя нѣкоторой данной плоскости.* Уравненіе этой поверхности будетъ:

$$(204)\qquad \varphi_1 . \cos\lambda_1 + \varphi_2 . \cos\lambda_2 + \varphi_3 . \cos\lambda_3 = 0.$$

Эту поверхность, аналогично тому, какъ это дѣлаетъ Mannheim для неизмѣняемой системы, можно назвать сопряженною съ линіею (202).

Всѣ поверхности (203) и (204) имѣютъ общія точки или общую линію или отчасти совпадаютъ, смотря по тому, существуетъ-ли центръ, линія или поверхность точекъ со скоростями, равными нулю.

Геометрическое мѣсто точекъ, скорости которыхъ равны по величинѣ, есть поверхность, такъ какъ эти точки должны удовлетворять условію

$$(204)'\qquad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = V^2,$$

гдѣ V постоянная величина. Поверхности, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ V, очевидно между собою не пересѣкаются.

Совокупность уравненій (202) и (204)′ даетъ *точки, скорости которыхъ геометрически равны.* Мы видимъ, что такихъ точекъ вообще говоря будетъ *конечное число* или даже вовсе можетъ не быть.

51. Фокусы и характеристики въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы.

Основное свойство коллинеарно-измѣняемой системы, что всякая плоскость, составленная изъ ея точекъ, во всякое время остается плоскостью, указываетъ, что для изученія распредѣленія скоростей въ

названной системѣ слѣдуетъ поверхности (197) взять въ видѣ параллельныхъ между собою плоскостей. Пусть будетъ

$$Lx + My + Nz - h = 0 \tag{205}$$

уравненіе одной изъ этихъ плоскостей, L, M, N косинусы угловъ ихъ общей нормали и h ихъ перемѣненный параметръ, опредѣляющій разстояніе ихъ отъ начала координатъ. Составляя для настоящаго случая формулу (198), мы найдемъ:

$$\begin{aligned} v\,.\cos\lambda = {} & (Px + Qy + Rz)(Lx + My + Nz) \\ & + (LL_1 + ML_2 + NL_3)x + (LM_1 + MM_2 + NM_3)y \\ & + (LN_1 + MN_2 + NN_3)z + (LS_1 + MS_2 + NS_3)\,, \end{aligned} \tag{206}$$

или, принимая во вниманіе уравненіе (205),

$$\begin{aligned} v\,.\cos\lambda = {} & h(Px + Qy + Rz) \\ & + (LL_1 + ML_2 + NL_3)x + (LM_1 + MM_2 + NM_3)y \\ & + (LN_1 + MN_2 + NN_3)z + (LS_1 + MS_2 + NS_3)\,. \end{aligned} \tag{207}$$

Отсюда мы видимъ, что *точки, имѣющія равныя между собою проекціи скоростей на направленіе нормали къ плоскости* (205), *образуютъ прямыя линіи.*

Всѣ эти прямыя между собою параллельны, такъ какъ отъ измѣненія угла λ въ уравненіи (207) угловые коэффиціенты этого уравненія не измѣняются.

Отсюда видно, что и *характеристика плоскости* тоже прямая линія и имѣетъ то-же направленіе. Она опредѣляется совокупностью уравненія (205) и уравненія

$$\begin{aligned} & h(Px + Qy + Rz) + (LL_1 + ML_2 + NL_3)x \\ & + (LM_1 + MM_2 + NM_3)y + (LN_1 + MN_2 + NN_3)z \\ & + (LS_1 + MS_2 + NS_3) = 0. \end{aligned} \tag{208}$$

Для различныхъ между собою плоскостей характеристики не будутъ между собою параллельны, такъ какъ съ измѣненіемъ h угловые коэффиціенты уравненія (208) будутъ вообще говоря мѣнять свои значенія и характеристики будутъ стало-быть образовать линейчатую поверхность. Эта поверхность алгебраическая, втораго порядка, потому-что ея урав-

неніе получится, если вмѣсто h подставить его выраженіе изъ (205) или, другими словами, приравнять нулю вторую часть уравненія (206). Такъ какъ она въ пересѣченіи съ системою параллельныхъ между собою плоскостей

$$Px + Qy + Rz = \textit{пост.} \tag{209}$$

даетъ прямыя линіи, то она не можетъ быть ничѣмъ инымъ, какъ *гиперболическимъ параболоидомъ.* Отсюда слѣдуетъ далѣе, что по мѣрѣ того, какъ мы будемъ передвигать плоскость (205) параллельно самой себѣ постоянно въ одномъ и томъ-же направленіи, характеристика будетъ поворачиваться около нормали къ этой плоскости постоянно въ одну сторону.

Всѣ поверхности характеристикъ имѣютъ свойство, что у нихъ одна и та-же направляющая плоскость (209).

Замѣтимъ еще, что вторыя части формулъ (172), приравненныя нулю, представляютъ собою тоже поверхности характеристикъ, именно тѣхъ, которыя соотвѣтствуютъ плоскостямъ, параллельнымъ координатнымъ.

Существуютъ *два случая, когда поверхности характеристикъ обращаются въ плоскости.*

1) Это будетъ, когда движеніе коллинеарно-измѣняемой системы состоитъ изъ простаго раздвиганія; въ этомъ случаѣ $L_1, M_1, \ldots\ldots S_3$ равны нулю и уравненіе поверхности характеристикъ принимаетъ видъ:

$$(Px + Qy + Rz)\,(Lx + My + Nz) = 0$$

и опредѣляетъ собою *двѣ плоскости*, проходящія черезъ центръ раздвиганій. Первая изъ нихъ,

$$Px + Qy + Rz = 0,$$

содержитъ характеристики всѣхъ плоскостей (205), а вторая

$$Lx + My + Nz = 0,$$

есть одна изъ плоскостей, всѣ точки которой двигаются въ самой плоскости; извѣстно, что это имѣетъ мѣсто для всѣхъ плоскостей, проходящихъ черезъ центръ раздвиганій.

2) Второй случай, когда поверхность характеристикъ есть плоскость, получается, если коллинеарно-измѣняемую систему лишить раздвиганій, т. е. если ее превратить въ систему однородно-измѣняемую; потому-что тогда

$$P = 0,\ Q = 0,\ R = 0,$$

и уравненіе поверхности характеристикъ принимаетъ видъ:

$$(LL_1 + ML_2 + NL_3)\,x + (LM_1 + MM_2 + NM_3)\,y$$
$$+ (LN_1 + MN_2 + NN_3)\,z + LS_1 + MS_2 + NS_3 = 0.$$

Въ частности можно разсматривать

$$\begin{aligned} &L_1x + M_1y + N_1z + S_1 = 0,\\ (210)\qquad &L_2x + M_2y + N_2z + S_2 = 0,\\ &L_3x + M_3y + N_3z + S_3 = 0, \end{aligned}$$

какъ поверхности характеристикъ, соотвѣтствующія плоскостямъ, параллельнымъ координатнымъ. Эти плоскости и плоскости, параллельныя координатнымъ, обладаютъ до нѣкоторой степени *свойствомъ взаимности*. А именно, плоскости, параллельныя координатнымъ, можно разсматривать какъ поверхности характеристикъ, соотвѣтствующія плоскостямъ, которыя перпендикулярны одновременно къ двумъ изъ плоскостей (210). Дѣйствительно, для того, чтобы напримѣръ поверхностью характеристикъ была плоскость

$$x = \textit{пост}.$$

нужно предположить, что

$$LM_1 + MM_2 + NM_3 = 0,$$
$$LN_1 + MM_2 + NN_3 = 0;$$

а это равносильно предположенію, что плоскость (205) перпендикулярна ко второй и къ третьей изъ плоскостей (210).

52. О неизмѣнныхъ плоскостяхъ и объ осяхъ и центрахъ скоростей.

Мы видѣли въ предыдущемъ §, что во всякой плоскости коллине-

арно-измѣняемой системы существуютъ точки, образующія прямую, скорости которыхъ направлены по самой плоскости. Посмотримъ теперь, нельзя-ли найти такія *плоскости системы, которыя въ данный элементъ времени перемѣщаются параллельно самимъ себѣ,* и въ частности такія плоскости, *которыя въ разсматриваемый элементъ времени остаются неподвижными,* т. е. всѣ точки которыхъ въ данный моментъ имѣютъ скорости, лежащія въ этой плоскости. Если существуютъ плоскости послѣдняго рода, то онѣ въ данный элементъ времени своего положенія въ пространствѣ не измѣняютъ и могутъ *служить для оріентировки* при изученіи скоростей, перемѣщенія другихъ плоскостей и т. п. Пусть будетъ

$$L_0 x + M_0 y + N_0 z - 1 = 0, \tag{211}$$

одна изъ искомыхъ, перемѣщающихся параллельно себѣ плоскостей. Ея коэффиціенты должны удовлетворять условію

$$L_0\, v_x + M_0\, v_y + N_0\, v_z = k \tag{212}$$

при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ такихъ координатъ, которыя удовлетворяютъ уравненію (211). Здѣсь черезъ k означена скорость перемѣщенія плоскости параллельно себѣ, считаемая по нормали къ этой плоскости. Подставляя въ послѣднее уравненіе выраженія (172) и принимая во вниманіе уравненіе (211), получимъ условіе:

$$\begin{aligned} &Px + Qy + Rz + (L_0 L_1 + M_0 L_2 + N_0 L_3)\, x \\ &+ (L_0 M_1 + M_0 M_2 + N_0 M_3)\, y + (L_0 N_1 + M_0 N_2 + N_0 N_3)\, z \\ &+ L_0 S_1 + M_0 S_2 + N_0 S_3 - k = 0, \end{aligned} \tag{213}$$

которое должно имѣть мѣсто при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ x, y, z, удовлетворяющихъ уравненію (211). Для опредѣленія L_0, M_0, N_0 умножимъ (211) на неопредѣленный пока множитель λ и, приложивъ полученное выраженіе къ уравненію (213), приравняемъ нулю всѣ коэффиціенты. Это дастъ намъ 4 уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ L_0, M_0, N_0, λ:

$$\begin{aligned} &(L_1 + \lambda)\, L_0 + L_2 M_0 + L_3 N_0 + P = 0, \\ &M_1 L_0 + (M_2 + \lambda)\, M_0 + M_3\, L_0 + Q = 0, \\ &N_1 L_0 + N_2 M_0 + (N_3 + \lambda)\, N_0 + R = 0, \\ &S_1 L_0 + S_2 M_0 + S_3 L_0 - (k + \lambda) = 0. \end{aligned} \tag{214}$$

Исключивъ отсюда L_0, M_0, N_0, мы получимъ для опредѣленія λ уравненіе четвертой степени:

$$\begin{vmatrix} L_1+\lambda, & L_2, & L_3, & P \\ M_1, & M_2+\lambda, & M_3, & Q \\ N_1, & N_2, & N_3+\lambda, & R \\ S_1, & S_2, & S_3, & -(k+\lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (215)$$

Для каждаго изъ корней этого уравненія получается система рѣшеній для L_0, M_0, N_0 изъ уравненій (214); такимъ образомъ мы видимъ, что *коллинеарно-измѣняемая система имѣетъ въ каждый элементъ времени четыре перемѣщающихся параллельно самимъ себѣ плоскости*. Двѣ изъ нихъ или всѣ четыре могутъ быть и мнимыми.

Если плоскость (211) не измѣняетъ своего положенія и слѣдовательно всѣ точки ея перемѣщяются въ самой плоскости, то

$$k = 0,$$

послѣднее изъ уравненій (214) будетъ

$$S_1L_0 + S_2M_0 + S_3N_0 - \lambda = 0, \qquad (216)$$

а уравненіе (215) приметъ видъ:

$$\begin{vmatrix} L_1+\lambda, & L_2, & L_3, & P \\ M_1, & M_2+\lambda, & M_3, & Q \\ N_1, & N_2, & N_3+\lambda, & R \\ S_1, & S_2, & S_3, & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (217)$$

Итакъ *въ каждый элементъ времени коллинеарно-измѣняемая система имѣетъ четыре плоскости, не измѣняющихъ своего положенія* [1]). Эти плоскости мы будемъ называть *основными*. Двѣ изъ нихъ или всѣ четыре могутъ быть и мнимыми. Въ случаѣ вещественности всѣхъ четырехъ плоскостей, онѣ образуютъ собою тетраэдръ, шесть реберъ котораго суть такія прямыя линіи, точки которыхъ въ данный эле-

[1]) Геометрическій выводъ см. у Burmester'a, Zeitschrift für Math. u. Phys. B. XX. 1875 г.

ментъ времени перемѣщаются вдоль этихъ прямыхъ. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ существуютъ *шесть прямыхъ линій, не измѣняющихъ въ данный элементъ времени своего положенія въ пространствѣ.* Когда двѣ изъ основныхъ плоскостей мнимыя, то непремѣнно будетъ существовать одна неизмѣняющая своего положенія прямая; но могутъ существовать и другія такія прямыя.

Въ случаѣ существованія четырехъ основныхъ плоскостей вершины тетраэдра имѣютъ скорости, равныя нулю, потому-что подчинены требованію оставаться одновременно на трехъ не измѣняющихъ своего положенія плоскостяхъ. Это суть *мгновенные центры въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы. Число ихъ не можетъ быть болѣе четырехъ;* потому-что если-бы существовала пятая точка со скоростью, равною нулю, то плоскость, проведенная черезъ нее и черезъ двѣ изъ первыхъ неподвижныхъ точекъ, представляла-бы собою плоскость, не измѣняющую своего положенія, отличную отъ четырехъ основныхъ плоскостей. А это невозможно, какъ это видно изъ сказаннаго выше. Эти разсужденія не относятся впрочемъ къ частнымъ случаямъ движенія, въ которыхъ можетъ существовать безчисленное множество неподвижныхъ точекъ и плоскостей.

Могутъ-ли существовать мгновенные центры, когда двѣ или всѣ четыре основныхъ плоскости мнимыя, мы увидимъ ниже.

53. О характеристикахъ, фокусахъ, основныхъ линіяхъ и центрахъ скоростей плоской коллинеарно-измѣняемой системы.

Каждая изъ основныхъ плоскостей, взятая въ отдѣльности, представляетъ собою плоскую коллинеарно-измѣняемую систему. Изученіе распредѣленія въ ней скоростей полезно для уясненія вопроса о распредѣленіи скоростей въ системѣ трехъ измѣреній. Для плоской системы скорости опредѣляются слѣдующими формулами:

$$v_x = x(px + qy) + l_1 x + m_1 y + s_1,$$
$$v_y = y(px + qy) + l_2 x + m_2 y + s_2.$$

Проведемъ въ этой системѣ прямую

(218) $$lx + my - h = 0$$

и опредѣлимъ точки этой прямой, въ которыхъ проекціи скоростей на

ея направленіе одинаковы. Эти точки опредѣляются совокупностью уравненій (218) и

$$v\,.\,\cos\lambda = (lx + my)(px + qy) + (ll_1 + ml_2)x + (lm_1 + mm_2)y + ls_1 + ls_2,$$

изъ которыхъ послѣднее первой степени, благодаря тому, что $lx + my$ постоянное. Такимъ образомъ на каждой прямой, принадлежащей плоской коллинеарно-измѣняемой системѣ, находится только одна точка, для которой проекція скорости на направленіе этой прямой имѣетъ заданную величину.

Точка, скорость которой имѣетъ направленіе самой заданной прямой, должна удовлетворять уравненію

$$h(px + qy) + (ll_1 + ml_2)\,x + (lm_1 + mm_2)\,y + ls_1 + ms_2 = 0$$

и уравненію (218). Эта точка можетъ быть названа *характеристикою* данной прямой.

Геометрическое мѣсто характеристикъ всѣхъ параллельныхъ между собою прямыхъ линій опредѣляется уравненіемъ

$$(lx + my)(px + qy) + (ll_1 + ml_2)x + (lm_1 + mm_2)y + ls_1 + ms_2 = 0, \qquad (219)$$

которое принадлежитъ *гиперболѣ*. Одна изъ ассимптотъ этой гиперболы параллельна заданному направленію; а направленіе другой ассимптоты общее для всѣхъ гиперболъ и параллельно прямой

$$px + qy = 0.$$

Эта гипербола превращается въ двѣ прямыя линіи въ двухъ случаяхъ: 1) Это будетъ, когда движеніе состоитъ изъ простаго раздвиганія; въ этомъ случаѣ уравненіе (219) принимаетъ видъ:

$$(px + qy)(lx + my) = 0.$$

Первая изъ этихъ прямыхъ даетъ характеристики всѣхъ прямыхъ, параллельныхъ заданной, а вторая,

$$lx + my = 0,$$

будетъ одною изъ прямыхъ, всѣ точки которой двигаются вдоль этой

прямой. 2) Характеристика будетъ прямая линія, если коллинеарно-измѣняемая система превратится въ однородно-измѣняемую; тогда

$$p = 0 \,, \qquad q = 0$$

и линія характеристикъ будетъ:

$$(ll_1 + ml_2)x + (lm_1 + mm_2)y + ls_1 + ms_2 = 0.$$

Мы увидимъ ниже, что и въ общемъ случаѣ движенія существуютъ такія направленія, для которыхъ линія характеристикъ превращается въ двѣ прямыя линіи.

Обращаясь опять къ общему случаю движенія плоской коллинеарно-измѣняемой системы, отыщемъ такія прямыя, всѣ точки которыхъ въ данный моментъ перемѣщаются вдоль самыхъ прямыхъ. Полагая, что

$$l_0 x + m_0 y - 1 = 0$$

есть одна изъ искомыхъ прямыхъ, и поступая по способу, примѣненному выше къ коллинеарно-измѣняемой системѣ трехъ измѣреній, мы придемъ къ рѣшенію слѣдующихъ уравненій:

$$\begin{aligned} (l_1 + \lambda) l_0 + l_2 m_0 + p &= 0, \\ m_1 l_0 + (m_2 + \lambda) m_0 + q &= 0, \\ s_1 l_0 + s_2 m_0 - \lambda &= 0, \end{aligned}$$

которыя даютъ для λ кубическое уравненіе:

$$\text{(220)} \qquad \begin{vmatrix} l_1 + \lambda \,, & l_2 \,, & p \\ m_1 \,, & m_2 + \lambda \,, & q \\ s_1 \,, & s_2 \,, & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Въ случаѣ вещественности трехъ корней этого уравненія будутъ существовать три прямыя линіи, не измѣняющія своего положенія въ данный элементъ времени, и три точки, остающіяся въ это время неподвижными. Въ случаѣ вещественности одного корня уравненія (220) будетъ только одна такая прямая[1]). Можетъ-ли въ послѣднемъ случаѣ существовать неподвижная точка, мы увидимъ ниже.

---

*) Лигинъ (Nouv. Annales de math. 1873) обратилъ вниманіе на существованіе этихъ линій и точекъ, основываясь на свойствахъ коллинеарныхъ фигуръ.

54. Приложеніе предыдущихъ вопросовъ къ однородно-измѣняемой системѣ.

Для однородно-измѣняемой системы условіе (212) существованія плоскости, перемѣщающейся параллельно самой себѣ, принимаетъ видъ:

$$(L_0L_1 + M_0L_2 + N_0L_3)x + (L_0M_1 + M_0M_2 + N_0M_3)y$$
$$+ (L_0N_1 + M_0N_2 + N_0N_3)z + (L_0S_1 + M_0S_2 + N_0S_3) - k = 0,$$

а уравненія (214) и (215) обращаются въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} (L_1+\lambda)L_0 + L_2M_0 + L_3N_0 &= 0, \\ M_1L_0 + (M_2+\lambda)M_0 + M_3N_0 &= 0, \\ N_1L_0 + N_2M_0 + (N_3+\lambda)N_0 &= 0, \\ S_1L_0 + S_2M_0 + S_3N_0 - (k+\lambda) &= 0, \end{aligned} \qquad (221)$$

$$\begin{vmatrix} L_1+\lambda, & L_2, & L_3, & 0 \\ M_1, & M_2+\lambda, & M_3, & 0 \\ N_1, & N_2, & N_3+\lambda, & 0 \\ S_1, & S_2, & S_3, & -(k+\lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (222)$$

Послѣднее уравненіе распадается на два:

$$\begin{vmatrix} L_1+\lambda, & L_2, & L_3 \\ M_1, & M_2+\lambda, & M_3 \\ N_1, & N_2, & N_3+\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (223)$$

$$k + \lambda = 0.$$

Второе изъ этихъ условій не можетъ быть принято, въ предположеніи, что опредѣлитель (223) не равенъ нулю; это невозможно, ибо это равносильно предположенію, что L_0, M_0, N_0 равны нулю.

Такимъ образомъ для λ мы имѣемъ теперь кубическое уравненіе (223) и слѣдовательно *въ каждый элементъ времени могутъ существовать три или одна плоскости, перемѣщающіяся параллельно самимъ себѣ (теорема Bertrand'a*[1]*).* Такъ какъ въ однородно-измѣняемой системѣ всякія двѣ плоскости остаются параллельными самимъ себѣ, то *въ каждый элементъ времени существуютъ три*

---

[1]) Comptes rendus, 1868.

или одна системы плоскостей, перемѣщающихся параллельно самимъ себѣ. Это видно теперь также и изъ того, что въ первыя три изъ уравненій (221) и въ уравненіе (223) k не входитъ и поэтому опредѣленіе величинъ λ, L_0, M_0, N_0 отъ k не зависитъ. Тѣми-же уравненіями (221) и (223) опредѣляются стало-быть *три или одна плоскости, остающіяся въ данный элементъ времени неподвижными.* Всѣ точки такихъ *основныхъ* плоскостей перемѣщаются вдоль самихъ плоскостей. Въ случаѣ вещественности трехъ основныхъ плоскостей, существуютъ три пересѣкающіяся между собою оси *(оси скоростей)*, точки которыхъ двигаются вдоль самихъ себя. Точка пересѣченія основныхъ плоскостей имѣетъ скорость, равную нулю: это *центръ скоростей* однородно-измѣняемой системы. *Такая точка* въ каждый моментъ можетъ существовать *только одна;* ибо, еслибы существовала другая такая точка, то прямая, соединяющая ее съ первымъ центромъ скоростей, была-бы четвертою осью скоростей, чего быть не можетъ. Такая точка не можетъ также въ общемъ случаѣ находиться на одной изъ найденныхъ трехъ осей скоростей, потому-что, какъ мы знаемъ, всѣ точки вектора въ однородно-измѣняемой системѣ или удаляются друга отъ друга (въ случаѣ удлиненія вектора) или приближаются другъ-къ-другу (въ случаѣ сокращенія вектора); слѣдовательно всѣ точки на оси скоростей или удаляются или приближаются къ центру скоростей и ни одна изъ нихъ не можетъ оставаться неподвижною. Въ частности впрочемъ можетъ случиться, что всѣ точки на оси скоростей остаются неподвижными.

Разсмотримъ еще движеніе въ одной изъ основныхъ плоскостей, изъ которыхъ каждая, какъ и всякая другая плоскость системы, представляетъ собою плоскую однородно-измѣняемую систему. Для плоской системы скорости опредѣляются формулами:

$$v_x = l_1 x + m_1 y + s_1,$$
$$v_y = l_2 x + m_2 y + s_2,$$

и уравненія (221) и (223) обращаются въ слѣдующія:

$$(l_1 + \lambda)l_0 + l_2 m_0 = 0,$$
$$m_1 l_0 + (m_2 + \lambda)m_0 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} l_1 + \lambda, & l_2 \\ m_1, & m_2 + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Въ случаѣ дѣйствительности корней этого уравненія существуютъ двѣ оси скоростей и одинъ центръ скоростей. Въ случаѣ мнимости этихъ корней, осей скоростей вовсе не будетъ.

55. Разборъ случая, когда въ коллинеарно-измѣняемой системѣ четыре основныя плоскости дѣйствительныя.

Обращаясь опять къ системѣ коллинеарно-измѣняемой трехъ измѣреній, разсмотримъ внимательнѣе случай, когда всѣ четыре основныя плоскости вещественныя. Для простоты перенесемъ начало координатъ въ одну изъ вершинъ тетраэдра M_1, M_2, M_3, M_4, образуемаго основными плоскостями, напр. въ точку M_4, а оси координатъ возьмемъ по направленію трехъ его сходящихся реберъ M_4M_1, M_4M_2, M_4M_3. Перенесеніе начала координатъ въ точку со скоростью, равною нулю, уничтожаетъ въ формулахъ (172) члены, не зависящіе отъ координатъ,— S_1, S_2, S_3,—а замѣненіе ортогональной системы (x, y, z) косоугольною (x', y', z') приводитъ эти формулы къ слѣдующему виду:

$$\begin{aligned} v_x' &= (k_1x' + l_1y' + m_1z')(P'x' + Q'y' + R'z') \\ &\quad + L_1'x' + M_1'y' + N_1'z', \\ v_y' &= (k_2x' + l_2y' + m_2z')(P'x' + Q'y' + R'z') \\ &\quad + L_2'x' + M_2'y' + N_2'z', \\ v_z' &= (k_3x' + l_3y' + m_3z')(P'x' + Q'y' + R'z') \\ &\quad + L_3'x' + M_3'y' + N_3'z'. \end{aligned} \tag{224}$$

Выражая теперь условія, что точки, находящіяся на координатныхъ осяхъ (ребрахъ тетраэдра), имѣютъ скорости, направленныя соотвѣтственно по этимъ осямъ, т. е. что, когда

$$y' = 0, \quad z' = 0,$$

при всякомъ x' должно быть

$$v_y' = 0, \quad v_z' = 0$$

и т. д., мы приведемъ формулы (224) къ слѣдующему виду:

$$v_x' = k_1 x'(P'x' + Q'y' + R'z') + L_1'x',$$
$$v_y' = l_2 y'(P'x' + Q'y' + R'z') + M_2'y',$$
$$v_z' = m_3 z'(P'x' + Q'y' + R'z') + N_3 z'.$$

Дѣлая въ дѣйствительности преобразованіе координатъ, мы найдемъ, что k_1, l_2, m_3 суть суммы квадратовъ косинусовъ угловъ, образуемыхъ новыми осями съ первоначальными ортогональными осями. Каждый изъ этихъ коэффиціентовъ стало-быть равенъ единицѣ. Наконецъ, означая черезъ s_1, s_2, s_3 длины реберъ тетраэдра, сходящихся въ новомъ началѣ координатъ, выражая условія, что скорости точекъ, находящихся на концахъ этихъ реберъ, равны нулю, и отбрасывая значки, получимъ:

$$(225) \qquad \begin{aligned} v_x &= x(Px + Qy + Rz) - Ps_1x, \\ v_y &= y(Px + Qy + Rz) - Qs_2y, \\ v_z &= z(Px + Qy + Rz) - Rs_3z. \end{aligned}$$

Прежде всего разсмотримъ, какія скорости имѣютъ точки, лежащія на одномъ изъ реберъ тетраэдра, на M_4 M_1. Для этихъ точекъ

$$v_x = Px(x - s_1), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Направленіе скоростей точекъ въ промежуткѣ $M_4 M_1$ между неподвижными зависитъ отъ знака коэффиціента P и будетъ положительнымъ при P отрицательномъ и отрицательнымъ при P положительномъ. Наибольшую скорость будетъ имѣть точка, дѣлящая $M_4 M_1$, пополамъ. Точки прямой $M_4 M_1$, лежащія внѣ промежутка $M_4 M_1$ будутъ имѣть скорости направленныя одинаковымъ образомъ, противуположно предыдущимъ скоростямъ. Такимъ образомъ при P положительномъ точки, лежащія въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до M_1, стягиваются къ точкѣ M_4, а точки, лежащія въ предѣлахъ отъ M_4 до $+\infty$, удаляются отъ точки M_1. Подобное-же замѣчаніе можно сдѣлать и относительно двухъ другихъ реберъ тетраэдра, сходящихся въ точкѣ M_4, и вообще относительно всѣхъ шести его реберъ, потому-что видъ формулъ (225) не зависитъ отъ того, въ какой вершинѣ тетраэдра было выбрано начало координатъ.

Если-бы для разсматриваемаго момента P или Q или R равнялись нулю, то соотвѣтственно всѣ точки прямыхъ $M_4 M_1$ или $M_4 M_2$ или $M_4 M_3$ оставались-бы неподвижными. То-же самое будетъ имѣть мѣсто относительно реберъ $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, $M_1 M_2$, если будутъ соотвѣтственно

$$Qs_2 = Rs_3 \,,\ Rs_3 = Ps_1 \,,\ Ps_1 = Qs_2 \,.$$

Если попарно равны нулю Q и R, R и P или P и Q, то всѣ точки, лежащія соотвѣтственно въ плоскостяхъ $M_4 M_2 M_3$, $M_4 M_3 M_1$ или $M_4 M_1 M_2$, остаются неподвижными. Точно такъ-же, если

$$Ps_1 = Qs_2 = Rs_3 \,,$$

то всѣ точки плоскости $M_1 M_2 M_3$ будутъ неподвижны.

Наконецъ, если для даннаго момента всѣ три коэффиціента P, Q, R равны нулю, то нетолько вся поверхность тетраэдра, но и вообще вся коллинеарно-измѣняемая система будетъ въ этотъ моментъ неподвижна.

56. Распредѣленіе скоростей въ основныхъ плоскостяхъ.

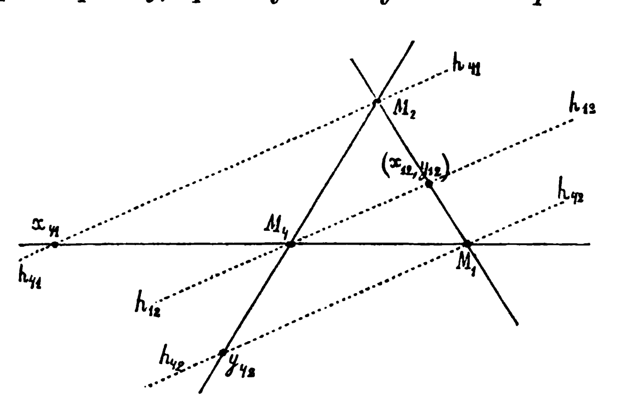
Разсмотримъ теперь, какъ происходитъ движеніе точекъ въ одной изъ граней тетраэдра, напр. въ плоскости $M_4 M_1 M_2$. Скорости точекъ этой плоскости опредѣляются формулами:

$$\begin{aligned} v_x &= x(Px + Qy) - Ps_1 x, \\ v_y &= y(Px + Qy) - Qs_2 y. \end{aligned} \tag{226}$$

Всякая прямая, проходящая черезъ одну изъ неподвижныхъ точекъ, напр. черезъ точку M_2, имѣемъ угловую скорость, которая для всѣхъ прямыхъ, лежащихъ внутри угла $M_4 M_2 M_1$, одного знака, а для другихъ прямыхъ того-же самаго пучка имѣемъ знакъ противуположный. Это прямо видно изъ того, что было сказано относительно движенія точекъ на ребрахъ тетраэдра.

Ни одна изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ неподвижную точку, не имѣетъ характеристики или, вѣрнѣе, характеристики всѣхъ этихъ прямыхъ совпадаютъ съ неподвижными точками. Остальныя прямыя имѣютъ различныя характеристики. Формулы (226) показываютъ, что *характеристики всѣхъ прямыхъ, параллельныхъ одной изъ сторонъ треугольника $M_4 M_1 M_2$, образуютъ прямую, проходящую че-*

резъ вершину, противуположную этой сторонѣ. *Три системы прямыхъ, параллельныхъ неподвижнымъ прямымъ M_4M_1, M_4M_2 и M_1M_2, имѣютъ линіи характеристикъ h_{41}, h_{42} и h_{12}, параллельныя между собою.* Точки пересѣченія этихъ прямыхъ со сторонами M_4M_1, M_4M_2, и M_1M_2 опредѣляются соотвѣтственно координатами:



$$x_{41} = \frac{Q}{P}s_2, \qquad y_{42} = \frac{P}{Q}s_1,$$

$$x_{12} = \frac{Qs_1s_2}{Qs_2 - Ps_1}, \qquad y_{12} = -\frac{Ps_1s_2}{Qs_2 - Ps_1}.$$

Въ § 53 было уже указано, что въ плоской коллинеарно-измѣняемой системѣ, каковою представляется грань $M_4M_1M_2$, геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, скорости которыхъ между собою параллельны,— гипербола. Уравненіе ея, если означить черезъ δ угловой коэффиціентъ, опредѣляющій заданное направленіе, будетъ теперь:

$$(Px + Qy)(\delta . x - y) - Ps_1 . \delta . x + Qs_2 . \delta . y = 0.$$

Эта гипербола проходитъ черезъ вершины треугольника $M_4M_1M_2$, что можно видѣть непосредственно, такъ какъ скорости этихъ вершинъ, будучи равны нулю, могутъ быть разсматриваемы какъ скорости, имѣющія всякія направленія.

Центръ гиперболы опредѣляется координатами:

$$x_0 = \frac{2PQ\delta . s_1 - (Q\delta - P)Qs_2}{(Q\delta + P)^2},$$

$$y_0 = \frac{2PQ\delta . s_2 + (Q\delta - P)P\delta . s_1}{(Q\delta + P)^2}. \qquad (227)$$

Одна изъ ассимптотъ этой гиперболы параллельна данному направленію, а другая параллельна прямой

$$Px + Qy = 0,$$

т. е. перпендикулярна къ скорости раздвиганія, происходящаго въ разсматриваемой плоскости.

Геометрическое мѣсто центровъ всѣхъ гиперболъ, соотвѣтствующихъ различнымъ заданнымъ направленіямъ, мы найдемъ, исключивъ δ изъ формулъ (227). Относительно δ оба уравненія второй степени. Извѣстно, что результатъ исключенія q изъ двухъ уравненій

$$kq^2 + lq + m = 0,$$
$$k'q^2 + l'q + m' = 0,$$

выражается формулою:

$$(kl' - lk')(lm' - ml') - (mk' - km')^2 = 0.$$

Прилагая ее къ данному случаю, получимъ:

$$(Ps_1 - Qs_2)(Px_0 + Qy_0)^2 - P(Ps_1 + 2Qs_2)x_0$$
$$- Q(2Ps_1 + Qs_2)y_0 + PQs_1s_2 = 0. \qquad (228)$$

Центры всѣхъ гиперболъ находятся такимъ образомъ на *параболѣ*, если разность $Ps_1 - Qs_2$ не равна нулю. Ось этой параболы образуетъ съ прямою M_1M_2 уголъ, равный дополненію до двухъ прямыхъ къ углу, образуемому съ нею нормалью къ скорости раздвиганія, происходящаго въ разсматриваемой плоскости.

Гипербола превращается въ двѣ прямыя линіи

$$\begin{aligned} \delta . x - y &= 0, \\ Px + Qy - Ps_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (229)$$

если

$$Ps_1 - Qs_2 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ

$$x_0 = \frac{Ps_1}{Q\delta + P}, \quad y_0 = \frac{Ps_1\delta}{Q\delta + P}$$

суть координаты точки пересѣченія этихъ прямыхъ. Парабола-же (228) превращается теперь въ прямую (229).

57. Распредѣленіе скоростей въ плоскостяхъ, параллельныхъ основнымъ.

Зная распредѣленіе скоростей въ одной изъ граней тетраэдра, нетрудно составить себѣ понятіе о томъ, какъ распредѣляются скорости въ плоскостяхъ, параллельныхъ этимъ гранямъ, а слѣдовательно, какъ онѣ вообще распредѣлены въ системѣ. Обращаясь для этого къ уравненіямъ (225) и давая въ нихъ одной изъ координатъ постоянное значеніе, мы найдемъ что характеристики всѣхъ плоскостей, параллельныхъ одной и той-же грани тетраэдра, между собою параллельны. Напримѣръ, характеристика плоскости

$$z = пост. \tag{230}$$

опредѣляется очевидно условіемъ

$$v_z = 0,$$

т. е. условіемъ

$$Px + Qy + Rz - Rs_3 = 0, \tag{231}$$

и представляетъ слѣдовательно въ плоскости прямую линію, угловые коэффиціенты которой суть P и Q. Эти коэффиціенты будутъ одни и тѣже для различныхъ плоскостей (230); слѣдовательно всѣ характеристики параллельны между собою.

Уравненіе (231), если въ немъ считать z перемѣннымъ, можно очевидно разсматривать какъ геометрическое мѣсто характеристикъ всѣхъ плоскостей, параллельныхъ грани $M_4 M_1 M_2$. Это есть плоскость, проходящая черезъ вершину M_3. Точно такъ-же плоскости

$$Px + Qy + Rz - Ps_1 = 0, \tag{232}$$

$$Px + Qy + Rz - Qs_2 = 0 \tag{233}$$

содержатъ въ себѣ характеристики плоскостей, параллельныхъ соотвѣтственно гранямъ $M_4 M_2 M_3$, $M_4 M_3 M_1$. Первая изъ этихъ плоскостей проходитъ черезъ вершину M_1, вторая черезъ вершину M_2. Всѣ три плоскости (231), (232) и (233) параллельны между собою. Характеристики плоскостей, параллельныхъ четвертой грани тетраэдра $M_1 M_2 M_3$, лежатъ въ плоскости

$$Px + Qy + Rz = 0, \tag{234}$$

параллельной первымъ тремъ плоскостямъ. Дѣйствительно, пусть будетъ

$$\frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} + \frac{z}{s_3} - \lambda = 0, \tag{235}$$

уравненіе одной изъ плоскостей, параллельныхъ грани $M_1 M_2 M_3$. Для того, чтобы скорость точки, принадлежащей этой плоскости, лежала въ послѣдней, должно быть выполнено условіе:

$$\frac{v_x}{s_1} + \frac{v_y}{s_3} + \frac{v_z}{s_3} = 0,$$

или, на основаніи уравненій (225) и (235),

$$(\lambda - 1)(Px + Qy + Rz) = 0;$$

и, такъ какъ λ можетъ имѣть произвольныя значенія, то должно имѣть мѣсто условіе (234). Итакъ можно сказать: *При движеніи коллинеарно-измѣняемой системы, при которомъ въ данный моментъ существуютъ четыре вещественныя основныя плоскости, геометрическое мѣсто характеристикъ плоскостей, параллельныхъ одной изъ основныхъ, есть плоскость, проходящая черезъ точку пересѣченія трехъ остальныхъ основныхъ плоскостей. Всѣ четыре плоскости характеристикъ, соотвѣтствующія гранямъ основнаго тетраэдра, между собою параллельны.* Эти четыре плоскости характеристикъ сливаются въ одну, если движеніе коллинеарно-измѣняемой системы состоитъ изъ простаго раздвиганія, потому-что въ этомъ случаѣ четыре вершины тетраэдра совпадаютъ въ одну точку. Это можно видѣть изъ того, что уравненія (225) превращаются въ уравненія (173), если принять s_1, s_2, s_3 равными нулю.

Для опредѣленія характера движенія въ случаѣ существованія четырехъ основныхъ плоскостей полезно также разсматривать въ основныхъ плоскостяхъ прямыя, проходящія черезъ вершины тетраэдра, а также разсматривать плоскости, проходящія черезъ ребра тетраэдра — оси скоростей. Въ § 55 мы видѣли, что скорости точекъ на оси скоростей, лежащихъ между мгновенными центрами, направлены въ одну сторону, а у остальныхъ точекъ этой прямой въ сторону противуположную.

Направленія этихъ скоростей опредѣляютъ собою направленія вращенія прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ скоростей, не лежащій на разсматриваемой оси скоростей, и слѣдовательно вообще опредѣляютъ характеръ движенія, происходящаго въ основной плоскости. Точно такъ-же направленія скоростей точекъ, лежащихъ на оси скоростей, опредѣляютъ собою направленіе вращенія плоскостей, проведенныхъ черезъ противуположную ось скоростей, не пересѣкающуюся съ первою. Наконецъ скорости точекъ въ основной плоскости опредѣляютъ собою направленія вращенія прямыхъ, проходящихъ черезъ мгновенный центръ, не лежащій въ этой основной плоскости, и слѣдовательно вообще опредѣляютъ характеръ движенія въ безконечно-малый элементъ времени всей коллинеарно-измѣняемой системы.

58. Разборъ случая, когда двѣ основныя плоскости мнимыя.

Перейдемъ теперь къ случаю, когда два корня уравненія (217) мнимые, т. е. когда въ данный моментъ существуютъ только *двѣ основныя плоскости.* Возьмемъ ось x по прямой ихъ пересѣченія, которая въ данный элементъ времени тоже не измѣняетъ своего положенія, а оси y и z къ ней перпендикулярно въ основныхъ плоскостяхъ. Если принять во вниманіе условія, что теперь для точекъ, для которыхъ y и z равны нулю, будутъ v_y и v_z равны нулю при всякихъ значеніяхъ x, и точно такъ же v_y равно нулю, когда y нуль, а v_z равно нулю, когда z нуль, то формулы (172) примутъ видъ:

$$
(236)\quad
\begin{aligned}
v_x &= x\,(Px + Qy + Rz) + L_1x + M_1y + N_1z + S_1,\\
v_y &= y\,(Px + Qy + Rz) + M_2y,\\
v_z &= z\,(Px + Qy + Rz) + N_3z.
\end{aligned}
$$

Разсмотримъ опять прежде всего движеніе въ основныхъ плоскостяхъ. Въ плоской коллинеарно-измѣняемой системѣ могутъ вообще говоря существовать три или одна основныя прямыя (§ 53). Въ настоящемъ случаѣ очевидно невозможно существованіе трехъ основныхъ прямыхъ въ *каждой* изъ основныхъ плоскостей, потому-что въ этомъ случаѣ существовали-бы и основныя плоскости кромѣ двухъ, нами предполагаемыхъ.

Далѣе съ перваго взгляда не представляется невозможнымъ, чтобы въ *одной* изъ двухъ основныхъ плоскостей существовали три основныя

прямыя; но можно показать, что въ дѣйствительности этого не будетъ. Возьмемъ напр. плоскость (xy); движеніе въ ней опредѣляется формулами:

$$v_x = x\,(Px + Qy) + L_1 x + M_1 y + S_1,$$
$$v_y = y\,(Px + Qy) + M_2 y.$$

Основныя прямыя въ этой плоской коллинеарно-измѣняемой системѣ отыскиваются при помощи кубическаго уравненія (220), которое теперь принимаетъ видъ:

$$(M_2 + \lambda)\;(\lambda^2 + L_1\lambda + PS_1) = 0.$$

Существованіе трехъ основныхъ прямыхъ, обусловливаемое дѣйствительностью корней этого уравненія возможно, если

$$L_1^2 - 4\,PS_1 \geqq 0. \qquad (237)$$

Но это неравенство противорѣчитъ предположенію о существованіи только двухъ основныхъ плоскостей. Въ самомъ дѣлѣ, если существуетъ не менѣе двухъ дѣйствительныхъ основныхъ плоскостей, то всегда можно формулы (172) привести къ виду (236). Уравненіе четвертой степени (217), опредѣляющее основныя плоскости, можетъ быть тогда такъ представлено:

$$(M_2 + \lambda)\;(N_3 + \lambda)\;(\lambda^2 + L_1\lambda + PS_1) = 0.$$

Корни

$$\lambda' = -\,M_2,\;\lambda'' = -\,N_3,$$

соотвѣтствуютъ предполагаемымъ нами основнымъ плоскостямъ, въ которыя мы помѣстили координатныя оси. Чтобы другихъ основныхъ плоскостей не существовало, необходимо, чтобы остальные корни были мнимые, т. е.

$$L_1^2 - 4\,PS_1 < 0. \qquad (238)$$

Этому условію и противорѣчитъ условіе (237) существованія трехъ основныхъ прямыхъ въ одной изъ основныхъ плоскостей.

Неравенство (238) показываетъ еще, что на неизмѣнной прямой, по которой пересѣкаются основныя плоскости, не можетъ суще-

ствовать неподвижныхъ точекъ. Именно, скорости точекъ, лежащихъ на оси x, опредѣляются формулой:

$$v_x = Px^2 + L_1x + S_1;$$

а это выраженіе вслѣдствіе условія (238) не можетъ обращаться въ нуль. Итакъ въ случаѣ существованія двухъ основныхъ плоскостей ни одна точка прямой ихъ пересѣченія не можетъ имѣть скорость равную нулю. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ точки этой прямой двигаются въ одну сторону. Одна изъ нихъ имѣетъ скорость minimum или maximum, смотря по тому, будетъ-ли P положительное или отрицательное. Знакъ P опредѣляетъ вмѣстѣ съ тѣмъ направленіе движенія точекъ на разсматриваемой прямой.

59. Опредѣленіе осей скоростей для предыдущаго случая.

Изъ того, что теперь существуютъ только двѣ основныхъ плоскости, еще не слѣдуетъ, что только одна прямая линія въ системѣ—ихъ пересѣченіе—въ данный элементъ времени неподвижна. И дѣйствительно можно видѣть, что всегда существуетъ еще другая неизмѣнная прямая, не пересѣкающаяся съ первой. Для этого нужно отыскать въ каждой изъ основныхъ плоскостей, т. е. въ плоскостяхъ (xy) и (zx), точки, имѣющія скорость равную нулю. Въ первой изъ этихъ плоскостей координаты этихъ точекъ опредѣляются изъ уравненій

$$(239)\qquad \begin{aligned} x\,(Px + Qy) + L_1x + M_1y + S_1 = 0, \\ y\,(Px + Qy) + M_2y = 0. \end{aligned}$$

Изъ двухъ значеній y во второмъ уравненіи (239) мы не можемъ взять

$$y = 0,$$

такъ какъ мы видѣли уже, что на оси x неподвижныхъ точекъ существовать не можетъ; поэтому на плоскости (xy) неподвижная точка M_0 будетъ только одна:

$$x_0 = \frac{QS_1 - M_1M_2}{PM_1 + Q\,(M_2 - L)},\quad y_0 = \frac{PS_1 + M_2\,(M_2 - L_1)}{PM_1 + Q\,(M_2 - L_1)}.$$

Точно такъ-же мы найдемъ изъ уравненій

$$\begin{aligned} x\,(Px + Rz) + L_1x + N_1z + S_1 = 0, \\ z\,(Px + Rz) + N_3z = 0, \end{aligned}$$

координаты точки M_0', лежащей въ плоскости (zx) и имѣющей скорость, равную нулю:

$$x_0' = \frac{RS_1 - N_1 N_2}{PN_1 + R\,(N_3 - L_1)},\quad y_0' = \frac{PS_1 + N_3\,(N_3 - L_1)}{PN_1 + R\,(N_3 - L_1)}.$$

Другихъ центровъ или осей скоростей существовать не можетъ, такъ какъ присутствіе ихъ влекло-бы за собою существованіе основныхъ плоскостей, помимо двухъ предполагаемыхъ.

Всѣ плоскости, проведенныя черезъ прямую $M_0 M_0'$, поворачиваются въ данный элементъ времени въ одну и ту-же сторону, и направленіе ихъ вращенія опредѣляется направленіемъ, по которому передвигаются точки первой оси скоростей, т. е. оси (x). Напротивъ того, плоскости, проходящія черезъ ось (x), поворачиваются въ различныя стороны, смотря по тому, находятся-ли точки ихъ пересѣченія съ прямою $M_0 M_0'$ въ промежуткѣ между точками M_0 и M_0' или внѣ этого промежутка; потому что направленіе движенія точекъ самой прямой $M_0 M_0'$ зависитъ отъ этого обстоятельства. Легко видѣть, что движеніе этихъ точекъ происходитъ такимъ-же образомъ, какъ движеніе на ребрахъ основнаго тетраэдра въ случаѣ существованія четырехъ основныхъ плоскостей (§ 55).

60. Распредѣленіе скоростей въ основныхъ плоскостяхъ и имъ параллельныхъ въ случаѣ, когда двѣ основныя плоскости мнимыя.

Характеристики прямыхъ, лежащихъ въ одной изъ основныхъ плоскостей и параллельныхъ прямой пересѣченія этихъ плоскостей, образуютъ прямыя, проходящія черезъ неподвижныя точки:

$$Px + Qy + M_2 = 0$$

въ плоскости (xy) и

$$Px + Rz + N_3 = 0 \tag{240}$$

въ плоскости (zx). Эти прямыя соотвѣтственно параллельны ассимптотамъ тѣхъ гиперболъ, на которыхъ расположены фокусы прямыхъ, параллельныхъ оси x. Дѣйствительно, геометрическія мѣста этихъ фокусовъ опредѣляются условіями:

$$x(Px + Qy) + L_1 x + M_1 y + S_1 = 0$$

въ плоскости (xy) и

$$x(Px + Rz) + L_1x + N_1z + S_1 = 0$$

въ плоскости (zx). Гиперболы эти проходятъ соотвѣтственно черезъ неподвижныя точки M_0 и M_0' и никогда не пересѣкаютъ оси (x), потому-что на этой прямой только неподвижную точку можно было-бы разсматривать какъ фокусъ; а неподвижныхъ точекъ на ней не существуетъ.

Точки основной плоскости, имѣющія скорости, параллельныя между собою, но какого-нибудь направленія, образуютъ гиперболы. Центры всѣхъ такихъ гиперболъ образуютъ параболу. Все это можетъ быть изслѣдовано совершенно такъ-же, какъ это сдѣлано выше (§ 56) для случая четырехъ основныхъ плоскостей.

Характеристики плоскостей, параллельныхъ основной плоскости (xy), суть прямыя между собою параллельныя и образующія плоскость

$$Px + Qy + Rz + N_3 = 0. \tag{241}$$

Эта плоскость проходитъ черезъ неподвижную точку M_0' на плоскости (zx) и пересѣкается съ этою основною плоскостью по прямой, которая есть не что иное, какъ геометрическое мѣсто характеристикъ всѣхъ прямыхъ въ плоскости (zx), параллельныхъ неизмѣнной прямой. Это можно видѣть, обративъ вниманіе на уравненіе (240). Подобное-же можно сказать относительно характеристикъ всѣхъ плоскостей, параллельныхъ плоскости (zx). Эти характеристики образуютъ плоскость

$$Px + Qy + Rz + M_2 = 0,$$

параллельную плоскости (241).

61. Разборъ случая, когда всѣ основныя плоскости мнимыя.

Обратимся наконецъ къ случаю, когда въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы не существуетъ ни одной основной плоскости, т. е. когда всѣ корни уравненія (217) мнимые. Можно показать, что въ этомъ случаѣ не можетъ существовать ни одного центра скоростей. Для этого замѣтимъ, что въ случаѣ существованія такого центра въ системѣ будутъ по крайней мѣрѣ двѣ основныхъ плоскости, что противорѣчитъ сдѣланному теперь предположенію. Дѣйствительно, когда въ коллинеарно-измѣняемой системѣ есть точка со скоростью, равною нулю,

то, перенеся начало координатъ въ эту точку, можно формулы для скоростей представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} v_x &= x(Px + Qy + Rz) + L_1'x + M_1'y + N_1'z, \\ v_y &= y(Px + Qy + Rz) + L_2'x + M_2'y + N_2'z, \\ v_z &= z(Px + Qy + Rz) + L_3'x + M_3'y + N_3'z. \end{aligned} \tag{242}$$

Если теперь составить уравненіе (217) для опредѣленія основныхъ плоскостей, то оно всегда будетъ имѣть корень

$$\lambda = 0,$$

потому-что будетъ имѣть видъ:

$$\begin{vmatrix} L_1' + \lambda, & L_2', & L_3', & P \\ M_1', & M_2' + \lambda, & M_3', & Q \\ N_1', & N_2', & N_3' + \lambda, & R \\ 0, & 0, & 0, & \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{243}$$

Что касается до осей скоростей, то онѣ могутъ существовать, какъ это можно видѣть уже изъ частныхъ случаевъ. Такъ напр. винтовое движеніе твердаго тѣла представляетъ собою частный случай движенія коллинеарно-измѣняемой системы, въ которомъ нѣтъ ни одной основной плоскости, но существуетъ ось скоростей.

Вообще говоря отысканіе осей скоростей въ коллинеарно-измѣняемой системѣ независимо отъ опредѣленія основныхъ плоскостей можетъ быть сведено къ опредѣленію *линій фокусовъ* для параллельныхъ между собою плоскостей. Эти линіи фокусовъ должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: 1) онѣ должны быть прямыми линіями и 2) должны быть перпендикулярны къ данной системѣ параллельныхъ плоскостей. Въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы *линіи фокусовъ параллельныхъ плоскостей не будутъ прямыми линіями, а будутъ представляться пересѣченіями двухъ гиперболическихъ параболоидовъ.* Дѣйствительно, пусть будетъ

$$Lx + My + Nz = k \tag{244}$$

уравненіе одной изъ этихъ плоскостей. Координаты фокуса этой плоскости мы получимъ при помощи этого уравненія изъ условій:

$$\frac{v_x}{L} = \frac{v_y}{M} = \frac{v_z}{N}, \tag{245}$$

а эти условія, отдѣльно взятыя, представляютъ собою уравненія линій фокусовъ всѣхъ плоскостей, параллельныхъ плоскости (244). Уравненія (245) суть уравненія двухъ гиперболическихъ параболоидовъ:

$$(Nx - Lz)(Px + Qy + Rz) + (NL_1 - LL_3)x$$
$$+ (NM_1 - LM_3)y + (NN_1 - LN_3)z + (NS_1 - LS_3) = 0,$$
$$(Ny - Mz)(Px + Qy + Rz) + (NL_2 - ML_3)x$$
$$+ (NM_2 - MM_3)y + (NN_2 - MN_3)z + (NS_2 - MS_3) = 0.$$

Хотя эти параболоиды имѣютъ общую направляющую плоскость

$$Px + Qy + Rz = 0,$$

а другія направляющія плоскости,

$$Nx - Lz = 0,$$
$$Ny - Mz = 0,$$

пересѣкаются между собою по прямой, перпендикулярной къ даннымъ плоскостямъ (244), но вообще говоря эти параболоиды не будутъ имѣть общихъ производящихъ. Тѣмъ не менѣе существуютъ такія направленія (L, M, N) параллельныхъ плоскостей, при которыхъ линія фокусовъ прямая. Мы не будемъ въ это вдаваться, потому-что для общаго случая этотъ вопросъ разсмотрѣнъ выше другимъ путемъ; а для того случая, когда не существуетъ основныхъ плоскостей, можно помимо этого составить болѣе или менѣе ясное представленіе о распредѣленіи скоростей, сведя вопросъ къ одному изъ раньше разсмотрѣнныхъ случаевъ. Для этого нужно только представить себѣ, что у коллинеарно-измѣняемой системы отнято поступательное движеніе со скоростями S_1, S_2, S_3 по осямъ координатъ. Тогда остается движеніе, въ которомъ существуютъ двѣ или четыре основныхъ плоскости, какъ это показываютъ уравненія (242) и (243). Этотъ случай будетъ точнѣе разобранъ въ слѣдующемъ §.

62. Основныя плоскости въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ движенія коллинеарно-измѣняемой системы.

1) *Четыре основныя плоскости всегда существуютъ въ одно-*

образномъ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы (см. § 11). Движеніе разсматриваемой системы въ общемъ случаѣ вполнѣ опредѣляется движеніемъ пяти ея точекъ; и однообразное движеніе отличается тѣмъ, какъ мы видѣли въ § 11, что четыре точки задаются неподвижными; движеніе-же пятой точки можетъ быть задано произвольно. Очевидно, что четыре плоскости, опредѣляемыя четырьмя неподвижными точками, и будутъ основными.

Выбирая координатныя оси по тремъ сходящимся ребрамъ основнаго тетраэдра, мы можемъ принять уравненія (225) для опредѣленія скоростей въ однообразномъ движеніи, считая при этомъ только s_1, s_2, s_3 уже не функціями времени, а постоянными величинами. Такъ какъ въ этомъ случаѣ движеніе системы вполнѣ опредѣляется движеніемъ одной, пятой точки, то можно въ уравненіи (225) вмѣсто коэффиціентовъ P, Q, R ввести координаты и скорости этой пятой точки. Пусть будутъ онѣ соотвѣтственно X, Y, Z и V_x, V_y, V_z; тогда можно написать:

$$V_x = X(PX + QY + RZ) - Ps_1X,$$
$$V_y = Y(PX + QY + RZ) - Qs_2Y,$$
$$V_z = Z(PX + QY + RZ) - Rs_3Z;$$

откуда

$$P = \frac{s_2s_3V_x + s_2(V_zX - V_xZ) - s_3(V_xY - V_yX)}{X(s_2s_3X + s_3s_1Y + s_1s_2Z - s_1s_2s_3)},$$

$$Q = \frac{s_3s_1V_y + s_3(V_xY - V_yX) - s_1(V_yZ - V_zY)}{Y(s_2s_3X + s_3s_1Y + s_1s_2Z - s_1s_2s_3)},$$

$$R = \frac{s_1s_2V_z + s_1(V_yZ - V_zY) - s_2(V_zX - V_xZ)}{Z(s_2s_3X + s_3s_1Y + s_1s_2Z - s_1s_2s_3)}.$$

Подставляя эти выраженія въ (225), мы получимъ *скорости однообразнаго движенія коллинеарно-измѣняемой системы выраженными черезъ координаты и скорости той точки, которою это движеніе опредѣляется.*

Отсюда можно было-бы вывести аналитическимъ путемъ результаты, полученные Burmester'омъ геометрическими соображеніями*), но

*) Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. B. 23.

притомъ принять во вниманіе также и количественныя соотношенія между различными элементами, характеризующими однообразное движеніе системы.

2) *Въ случаѣ чистаго раздвиганія* существуетъ безчисленное множество основныхъ плоскостей: а именно, всякая плоскость, проходящая черезъ центръ раздвиганій, представляетъ собою основную плоскость, потому что всѣ векторы, проходящіе черезъ центръ раздвиганій, двигаются вдоль самихъ себя.

3) *Въ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы, не содержащаго поступательной слагаемой,* т. е. когда формулы для v_x, v_y, v_z не содержатъ членовъ, независящихъ отъ координатъ, всегда *существуютъ по крайней мѣрѣ двѣ дѣйствительныя основныя плоскости,* какъ это было уже замѣчено въ предыдущемъ §. Кромѣ плоскости, соотвѣтствующей корню

$$\lambda = 0$$

и которую мы найдемъ, положивъ въ первыхъ трехъ изъ уравненій (214) λ равнымъ нулю и опредѣливъ оттуда L_0, M_0, N_0, *остальныя три основныя плоскости будутъ имѣть положеніе, независящее отъ скоростей раздвиганія.* Чтобы это видѣть, нужно замѣтить, что теперь точка, лежащая въ началѣ координатъ, имѣетъ скорость, равную нулю; эта точка служитъ, стало-быть, однимъ изъ центровъ скоростей и слѣдовательно должна принадлежать тремъ основнымъ плоскостямъ, если онѣ всѣ вещественныя, или во всякомъ случаѣ находиться на одной изъ основныхъ плоскостей. Для отысканія такой основной плоскости общія формулы (214) и (217) не могутъ быть непосредственно приложены, потому что теперь въ уравненіи искомой плоскости, какъ плоскости, проходящей черезъ начало координатъ, не будетъ послѣдняго члена, независящаго отъ координатъ. Уравненіе (211) должно быть поэтому замѣнено уравненіемъ

(246) $$L_0x + M_0y + N_0z = 0;$$

а уравненіе (213), если еще положить въ немъ

$$k = 0,$$

принимаетъ видъ:

$$(L_0L_1 + M_0L_2 + N_0L_3)x + (L_0M_1 + M_0M_2 + N_0M_3)y$$
$$+ (L_0N_1 + M_0N_2 + N_0N_3)z = 0. \tag{247}$$

Умножая (246) на λ и складывая съ (247), получимъ:

$$\begin{aligned} (L_1 + \lambda)L_0 + L_2M_0 + L_3N_0 = 0, \\ M_1L_0 + (M_2 + \lambda)M_0 + M_3N_0 = 0, \\ N_1L_0 + N_2M_0 + (N_3 + \lambda)N_0 = 0. \end{aligned} \tag{248}$$

Исключая отсюда L_0, M_0, N_0, получимъ для λ кубическое уравненіе (223). Такимъ образомъ въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы, въ которомъ общая поступательная слагаемая скоростей равна нулю, три изъ основныхъ плоскостей проходятъ черезъ центръ раздвиганій и направленія ихъ; какъ показываютъ уравненія (248) и (223), не зависятъ отъ скоростей раздвиганій, а опредѣляются такъ-же, какъ если бы система была лишена раздвиганій, т. е. обратилась въ систему однородно-измѣняемую.

4) *Основныя плоскости въ движеніи однородно-измѣняемой системы* были уже разсмотрѣны въ § 54. Къ этому мы сдѣлаемъ здѣсь еще нѣсколько замѣчаній.

Полагая въ уравненіи (222)

$$k = 0$$

мы получаемъ корень

$$\lambda = 0.$$

Присутствіе его показываетъ, что теперь *одна изъ основныхъ плоскостей удалилась въ безконечность,* ибо при λ, равномъ нулю, уравненія (248) въ общемъ случаѣ, т. е. если опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} L_1, & L_2, & L_3 \\ M_1, & M_2, & M_3 \\ N_1, & N_2, & N_3 \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю, могутъ удовлетворяться только рѣшеніями

$$L_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad N_0 = 0,$$

и слѣдовательно уравненіе (211) будетъ удовлетворяться только безконечно-большими значеніями координатъ.

Три остальныя основныя плоскости даютъ въ своемъ пересѣченіи, какъ мы видѣли уже въ § 54, три оси скоростей и одинъ центръ скоростей. Точки, находящіяся, на оси скоростей или всѣ удаляются отъ центра скоростей, или всѣ къ нему приближаются; но въ частномъ случаѣ всѣ точки на оси скоростей могутъ быть неподвижными. Условія для того, чтобы это могло случиться, можно опредѣлить, отыскивая центръ скоростей непосредственно изъ уравненій для скоростей однородно-измѣняемой системы. Для простоты преобразуемъ координатныя оси, сдѣлавъ ихъ параллельными осямъ удлиненій. Тогда для опредѣленія центра скоростей будемъ имѣть условія

$$\varepsilon_1 x + qz - ry + S_1 = 0,$$
$$\varepsilon_2 y + rx - pz + S_2 = 0,$$
$$\varepsilon_3 z + py - qx + S_3 = 0,$$

и найдемъ вообще говоря одно рѣшеніе. Чтобы центры скоростей образовали цѣлую прямую линію, нужно, чтобы одно изъ этихъ уравненій было слѣдствіемъ двухъ другихъ, т. е. чтобы

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1, & -r, & q \\ r, & \varepsilon_2, & -p \\ -q, & p, & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{250}$$

Согласно съ Durrande'омъ мы можемъ этотъ случай формулировать слѣдующимъ образомъ. Раскрывая опредѣлитель (250), получаемъ:

$$\varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2 + \varepsilon_3 r^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 0. \tag{251}$$

Принимая p, q, r за координаты точки, мы можемъ сказать, что условіе существованія оси скоростей равносильно тому, чтобы конецъ угловой скорости, отложенной отъ начала координатъ, находился на поверхности втораго порядка (251), т. е. чтобы угловая скорость была производящею нѣкотораго конуса втораго порядка. Поверхность (251) можетъ быть и мнимою; тогда существованіе прямой, точки которой имѣли-бы скорость, равную нулю, невозможно. Это будетъ въ томъ случаѣ, когда всѣ главныя удлиненія одного знака.

Можетъ еще случиться, что въ нѣкоторый моментъ движенія будетъ существовать цѣлая плоскость, скорости точекъ которой равны нулю. Для этого очевидно необходимо, чтобы всѣ уравненія (249) были тождественны между собою, т. е. чтобы коэффиціенты были соотвѣтственно пропорціональны. Итакъ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = k.r, \quad -r = k.\varepsilon_2, \quad q = -k.p, \quad S_1 = k.S_2 \\ r = -l.q, \quad \varepsilon_2 = l.p, \quad -p = l.\varepsilon_3, \quad S_2 = l.S_3. \end{aligned} \qquad (252)$$

Отсюда выводимъ

$$-p = \frac{1}{k}.q,$$

$$-q = \frac{1}{l}.r,$$

$$-r = kl.p.$$

Перемножая эти уравненія почленно, получаемъ

$$pqr = 0.$$

Итакъ необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ одна изъ слагаемыхъ угловыхъ скоростей около осей главныхъ удлиненій была равна нулю. Положимъ, что

$$r = 0.$$

Если при этомъ k и l не равны нулю, то по условіямъ (252) p и q должны быть равны нулю, а поэтому и всѣ скорости главныхъ удлиненій будутъ равны нулю. Отбрасывая этотъ случай, замѣтимъ, что еще можетъ быть другой, а именно, когда одинъ изъ коэффиціентовъ пропорціональности, k или l, равенъ нулю. Пусть будетъ

$$k = 0;$$

это значитъ другими словами, что v_x равно нулю, т. е. скорости всѣхъ точекъ параллельны плоскости (yz). Теперь ε_2, ε_3 и p могутъ не равняться нулю, но должны удовлетворять условію

$$\varepsilon_2\varepsilon_3 + p^2 = 0;$$

т. е. скорости главныхъ удлиненій, перпендикулярныхъ къ оси (x), должны быть противуположныхъ знаковъ, а угловая скорость около оси (x)

должна численно равняться средней геометрической между скоростями этихъ главныхъ удлиненій.

Формулы (249) превращаются теперь въ слѣдующія тожественныя:

$$S_2 + \varepsilon_2 y - pz = 0,$$
$$S_3 + py + \varepsilon_3 z = 0.$$

На плоскости (yz) мы получаемъ прямую, точки которой имѣютъ скорость, равную нулю; угловой коэффиціентъ этой прямой слѣдующій:

$$\frac{\varepsilon_2}{p} = -\frac{p}{\varepsilon_3}.$$

Плоскость со скоростями, равными нулю, проходитъ черезъ эту прямую и очевидно параллельна оси (x).

Если кромѣ k еще и l будетъ равно нулю, т. е. скорости всѣхъ точекъ параллельны оси (z), то всѣ три угловыя скорости p, q, r будутъ равны нулю и кромѣ того S_1, S_2, ε_1 и ε_2. S_3 и ε_3 могутъ не быть равными нулю. Для системы остается въ этомъ случаѣ движеніе, состоящее изъ поступательнаго параллельно оси (z) и удлиненія по тому же направленію со скоростью ε_3. Плоскость со скоростями, равными нулю, параллельна въ этомъ случаѣ координатной плоскости (xy).

Если система подобно-измѣняемая, то существованіе прямой со скоростями, равными нулю, невозможно, потому что тогда

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$$

и поэтому поверхность (251) всегда мнимая. Центръ же скоростей всегда будетъ существовать, такъ какъ его координаты опредѣляются изъ уравненій первой степени.

Если наконецъ система неизмѣняемая, то опредѣлитель (250), который теперь будетъ имѣть видъ

$$\begin{vmatrix} 0, & -r, & q \\ r, & 0, & -p \\ -q, & p, & 0 \end{vmatrix},$$

всегда будетъ равенъ нулю и слѣдовательно всегда будетъ существовать ось скоростей.

63. О скорости девіаціи векторовъ, проведенныхъ изъ общаго центра раздвиганія и однородной деформаціи, въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы.

Для характеристики распредѣленія скоростей полезно разсмотрѣть еще скорости вращенія векторовъ, проведенныхъ изъ общаго центра раздвиганій и однородной деформаціи. Согласно съ Durrande'омъ[1]) мы будемъ *угловую скорость отклоненія векторовъ называть ихъ девіаціею.* Чтобы получить эту скорость, нужно полную скорость точки, находящейся на концѣ какого-нибудь вектора ρ, проведеннаго изъ центра деформаціи, разложить на двѣ скорости: v_ρ, направленную вдоль вектора и v_σ, перпендикулярную къ вектору. Тогда скорость девіаціи, σ, будетъ очевидно опредѣляться отношеніемъ $v_\sigma : \rho$, а для опредѣленія v_σ будемъ имѣть:

$$\overline{v}_\sigma = \overline{v} - \overline{v}_\rho. \tag{253}$$

Приложимъ эту формулу къ общему случаю движенія коллинеарно-измѣняемой системы, лишенной только поступательнаго перемѣщенія, которое очевидно на девіацію не вліяетъ. Очевидно также, что раздвиганіе на скорость девіаціи никакого вліянія не оказываетъ, ибо при чистомъ раздвиганіи никакой девіаціи не происходитъ. Поэтому изученіе девіаціи въ коллинеарно-измѣняемой системѣ сводится къ изученію девіаціи въ системѣ однородно-измѣняемой. Это можно видѣть также изъ формулы (253). Составляя выраженіе

$$\begin{aligned} v_{\sigma x} = v_x - v_{\rho x} = v_x - \frac{xv_x + yv_y + zv_z}{\rho} \cdot \frac{x}{\rho} \\ = x(Px + Qy + Rz) + L_1x + M_1y + N_1z \\ -\rho(Px + Qy + Rz) \cdot \frac{x}{\rho} \\ -\frac{(L_1x+M_1y+N_1z)x+(L_2x+M_2y+N_2z)y+(L_3x+M_3y+N_3z)z}{\rho} \cdot \frac{x}{\rho}, \end{aligned}$$

мы видимъ, что $v_{\sigma x}$ и точно такъ-же $v_{\sigma y}$ и $v_{\sigma z}$ отъ P, Q, R не зависятъ.

---

[1]) Въ этомъ § мы будемъ придерживаться пріема, предложеннаго Durrande'омъ (Essai sur le déplacement etc., Journ. Scient. de l'Ecole Normale (2) II).

Итакъ обратимся прямо къ скоростямъ девіаціи однородно-измѣняемой системы, а для этого къ формуламъ

(254)
$$v_x = \varepsilon_1 x - ry + qz,$$
$$v_y = \varepsilon_2 y - pz + rx,$$
$$v_z = \varepsilon_3 z - qx + py,$$

въ которыхъ координатныя оси отнесены къ главнымъ осямъ деформаціи. Чтобы разложить скорость каждой точки на v_ρ и v_σ, напишемъ:

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \cos \beta, \quad z = \rho \cos \gamma,$$

откуда

(255)
$$v_x = \frac{d\rho}{dt} \cos \alpha + \rho \frac{d \cos \alpha}{dt},$$
$$v_y = \frac{d\rho}{dt} \cos \beta + \rho \frac{d \cos \beta}{dt},$$
$$v_z = \frac{d\rho}{dt} \cos \gamma + \rho \frac{d \cos \gamma}{dt}.$$

Очевидно, что $\frac{d\rho}{dt} \cos \alpha$, $\frac{d\rho}{dt} \cos \beta$, $\frac{d\rho}{dt} \cos \gamma$ суть проекціи скорости v_ρ, а остальные три члена проекціи скорости v_σ.

Опредѣляя углами λ, μ, ν направленіе скорости, зависящей отъ девіаціи, можно написать:

(256)
$$\frac{d \cos \alpha}{dt} = \sigma . \cos \lambda,$$
$$\frac{d \cos \beta}{dt} = \sigma . \cos \mu,$$
$$\frac{d \cos \gamma}{dt} = \sigma . \cos \nu.$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \varepsilon;$$

слѣдовательно

$$\frac{d\rho}{dt}\cos\alpha = \varepsilon\rho\cos\alpha = \varepsilon x,$$

$$\frac{d\rho}{dt}\cos\beta = \varepsilon\rho\cos\beta = \varepsilon y,$$

$$\frac{d\rho}{dt}\cos\gamma = \varepsilon\rho\cos\gamma = \varepsilon z.$$

Поэтому для полной девіаціи вектора находимъ:

$$\begin{aligned} \sigma.\cos\lambda &= (\varepsilon_1 - \varepsilon)\cos\alpha - r\cos\beta + q\cos\gamma, \\ \sigma.\cos\mu &= r\cos\alpha + (\varepsilon_2 - \varepsilon)\cos\beta - p\cos\gamma, \\ \sigma.\cos\nu &= -q\cos\alpha + p\cos\beta + (\varepsilon_3 - \varepsilon)\cos\gamma. \end{aligned} \qquad (257)$$

Составимъ еще другую зависимость между σ, ω, ε_1, ε_2, ε_3, въ которой яснѣе будетъ видно вліяніе собственно удлиненія на величину девіаціи. Проведемъ плоскость черезъ данный векторъ и черезъ угловую скорость ω. Означая черезъ ξ, η, ζ углы, составляемые нормалью къ этой плоскости съ осями координатъ, можемъ написать:

$$q\cos\gamma - r\cos\beta = \frac{qz - ry}{\rho} = \omega.\sin(\rho,\omega).\cos\xi,$$

$$r\cos\alpha - p\cos\gamma = \frac{rx - pz}{\rho} = \omega.\sin(\rho,\omega).\cos\eta,$$

$$p\cos\beta - q\cos\alpha = \frac{py - qx}{\rho} = \omega.\sin(\rho,\omega).\cos\zeta.$$

Такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \sigma.\cos\lambda + \varepsilon.\cos\alpha &= \varepsilon_1\cos\alpha + \omega.\sin(\rho,\omega).\cos\xi, \\ \sigma.\cos\mu + \varepsilon.\cos\beta &= \varepsilon_2\cos\beta + \omega.\sin(\rho,\omega).\cos\eta, \\ \sigma.\cos\nu + \varepsilon.\cos\gamma &= \varepsilon_3\cos\gamma + \omega.\sin(\rho,\omega).\cos\zeta. \end{aligned} \qquad (258)$$

Означая уголъ между направленіемъ девіаціи и нормалью (ξ, η, ζ) черезъ δ, умножая (258) на $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ и складывая, получимъ:

$$\sigma.\cos\delta = \omega.\sin(\rho,\omega) + \varepsilon_1\cos\alpha.\cos\xi + \varepsilon_2\cos\beta.\cos\eta + \varepsilon_3\cos\gamma.\cos\zeta.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что проекція скорости девіаціи на нормаль къ разсматриваемой плоскости состоитъ изъ двухъ членовъ, изъ которыхъ одинъ зависитъ отъ угловой скорости, а другой отъ удлиненій,

Если система подобно-измѣняемая ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$) или неизмѣняемая, то скорость девіаціи нормальна къ разсматриваемой плоскости, и мы получаемъ:

$$\sigma = \omega . sin (\rho, \omega)$$ [1].

Чтобы опредѣлить, какъ распредѣляется девіація векторовъ въ системѣ, найдемъ сначала, нѣтъ-ли такихъ векторовъ, девіація которыхъ въ данный элементъ времени равна нулю. Для этого приравняемъ нулю вторыя части формулъ (257):

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 - \varepsilon) \cos\alpha - r \cos\beta + q \cos\gamma &= 0, \\ r \cos\alpha + (\varepsilon_2 - \varepsilon) \cos\beta - p \cos\gamma &= 0, \\ -q \cos\alpha + p \cos\beta + (\varepsilon_3 - \varepsilon) \cos\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаемъ кубическое уравненіе для опредѣленія ε:

$$\text{(259)} \qquad \begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon, & -r, & q \\ r, & \varepsilon_2 - \varepsilon, & -p \\ -q, & p, & \varepsilon_3 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

Каждому корню этого уравненія, если онъ дѣйствительный, соотвѣтствуетъ опредѣленное направленіе вектора, девіаціи котораго не происходитъ. Уравненіе (259) имѣетъ одинъ или три вещественныхъ корня, поэтому существуетъ одинъ или три вектора, которые въ данный элементъ времени не измѣняютъ своего направленія. Изслѣдованіе уравненія (259), которое по раскрытіи опредѣлителя имѣетъ видъ

$$\text{(260)} \qquad \begin{aligned} &\varepsilon^3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon^2 + (\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \omega^2)\varepsilon \\ &- (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 p^2 + \varepsilon_2 q^2 + \varepsilon_3 r^2) = 0, \end{aligned}$$

можно найти у Жуковскаго[2]. Не останавливаясь на этомъ, замѣтимъ только, что если всѣ три скорости удлиненій положительныя, то непремѣнно существуютъ три вектора, не имѣющіе девіаціи. Это видно по первому взгляду на уравненіе (260).

---

[1]) Durrande, Essai etc. § 5.

[2]) Кинематика жидкаго тѣла, стр. 42—47.

Постараемся теперь нагляднѣе представить распредѣленіе девіацій. Формулы (255) и (256) даютъ:

$$v^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \sigma^2\rho^2 = (\varepsilon^2 + \sigma^2)\rho^2;$$

а изъ уравненіи (254) находимъ:

$$v^2 = (\varepsilon_1^2 + q^2 + r^2)x^2 + (\varepsilon_2^2 + r^2 + p^2)y^2 + (\varepsilon_3^2 + p^2 + q^2)z^2$$
$$- 2[rq + p(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)]yz - 2[pr + q(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)]zx - 2[qp + r(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]xy.$$

Означая вторую часть этого уравненія черезъ Φ, мы получимъ:

$$\sigma^2 = \frac{\Phi}{\rho^2} - \varepsilon^2;$$

а по формулѣ (184):

$$\sigma^2 = \frac{\Phi}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Откладывая на каждомъ направленіи величину, обратную σ, т. е. полагая

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\sigma^2}, \tag{261}$$

получимъ уравненіе

$$(x^2 + y^2 + z^2)(\Phi - 1) - (\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2)^2 = 0$$ [1]

поверхности четвертаго порядка, по которой можно для каждаго направленія опредѣлить девіацію, проведя изъ начала координатъ векторъ даннаго направленія до пересѣченія съ этою поверхностью и беря величину, обратную этому вектору.

Формула (261) показываетъ, что векторы, для которыхъ скорости девіаціи равны, лежатъ на конусѣ четвертаго порядка

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2) - (\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2)^2 - \sigma^2(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

Разсмотримъ еще девіаціи въ плоской однородно-измѣняемой систе-

---

[1]) Durrande. Essai etc. § 4.

мѣ. Не обращая вниманія на поступательное движеніе, мы можемъ написать:

$$v_x = \frac{d\rho}{dt}\cos\alpha + \rho\frac{d\cos\alpha}{dt},$$

$$v_y = \frac{d\rho}{dt}\sin\alpha + \rho\frac{d\sin\alpha}{dt},$$

гдѣ α уголъ, составляемый векторомъ ρ съ осью x. Принимая во вниманіе, что

$$\frac{d\rho}{dt}\cos\alpha = \varepsilon x,$$

$$\frac{d\rho}{dt}\sin\alpha = \varepsilon y,$$

имѣемъ

$$\sigma.\cos\lambda = (\varepsilon_1 - \varepsilon)\cos\alpha - r\sin\alpha,$$
$$\sigma.\sin\lambda = r\cos\alpha + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin\alpha;$$

и для опредѣленія ε находимъ квадратное уравненіе

(262) $$\varepsilon^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varepsilon + r^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0,$$

которое показываетъ, что *прямыя, не имѣющія девіаціи, тогда будутъ существовать, когда численно разность между скоростями главныхъ удлиненій будетъ больше удвоенной угловой скорости.*

Обращаясь теперь опять къ системѣ трехъ измѣреній, мы можемъ рѣшить вопросъ, будутъ-ли три основныя плоскости или одна: это будетъ зависѣть отъ того, какъ происходитъ движеніе въ одной изъ основныхъ плоскостей; если въ ней существуютъ двѣ прямыя, не имѣющія девіаціи, т. е. если корни уравненія (262) дѣйствительные, то въ системѣ трехъ измѣреній должна существовать и третья такая прямая. А въ этомъ случаѣ очевидно будутъ существовать три основныя плоскости.

64. Скорости девіаціи векторовъ въ чистой деформаціи.

Девіація векторовъ въ чистой деформаціи можетъ быть опредѣлена непосредственно слѣдующимъ образомъ. Если координатныя оси взять по направленіямъ главныхъ удлиненій, то можно написать:

$$\begin{aligned} v_{\sigma x} &= v_x - v_{\rho x} = (\varepsilon_1 - \varepsilon)x, \\ v_{\sigma y} &= v_y - v_{\rho y} = (\varepsilon_2 - \varepsilon)y, \\ v_{\sigma z} &= v_z - v_{\rho z} = (\varepsilon_3 - \varepsilon)z; \end{aligned} \tag{263}$$

откуда, принимая во вниманіе, что v_σ и v_ρ взаимно-перпендикулярны:

$$v_\sigma^{\,2} = v^2 - v_\rho^{\,2} = \varepsilon_1^{\,2}x^2 + \varepsilon_2^{\,2}y^2 + \varepsilon_3^{\,2}z^2 - \varepsilon^2\rho^2.$$

Замѣняя ε по формулѣ (184), можно скорость девіаціи написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sigma^2 = \frac{v_\sigma^{\,2}}{\rho^2} = \frac{y^2z^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + z^2x^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + x^2y^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\rho^4}.$$

Каждый членъ этой формулы, взятый отдѣльно, т. е.

$$\frac{y^2z^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2}{\rho^4}, \quad \frac{z^2x^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}{\rho^4}, \quad \frac{x^2y^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\rho^4},$$

опредѣляетъ собою квадратъ проекціи угловой скорости вращенія вектора на координатную ось. А именно, можно написать по формуламъ Эйлера:

$$\begin{aligned} v_{\sigma x} &= \sigma_y z - \sigma_z y, \\ v_{\sigma y} &= \sigma_z x - \sigma_x z, \\ v_{\sigma z} &= \sigma_x y - \sigma_y x. \end{aligned} \tag{264}$$

Если-же принять во вниманіе, что

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2}{\rho^2}$$

и слѣдовательно

$$\begin{aligned} v_{\sigma x} &= \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)xy^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)xz^2}{\rho^2}, \\ v_{\sigma y} &= \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)yz^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)yx^2}{\rho^2}, \\ v_{\sigma z} &= \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)zx^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)zy^2}{\rho^2}, \end{aligned}$$

и сравнить эти формулы съ (264), мы получимъ:

$$\sigma_x = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)yz}{\rho^2},$$

(265) $$\sigma_y = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)zx}{\rho^2},$$

$$\sigma_z = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)xy}{\rho^2}.$$

Скорость данной точки, зависящая отъ девіаціи, находится въ плоскости, проходящей черезъ векторъ ρ и черезъ нормаль къ поверхности скоростей удлиненій (къ деформатриссѣ, § 44), потому-что эта скорость есть геометрическая разность между полною скоростью чистой деформаціи, направленною, какъ мы видѣли въ § 44, нормально къ деформатриссѣ, и между скоростью, направленною вдоль вектора ρ. Такимъ образомъ скорость девіаціи, σ, имѣетъ направленіе нормали къ плоскости, проходящей черезъ векторъ ρ и черезъ нормаль къ деформатриссѣ, и слѣдовательно, зная деформатриссу, мы можемъ для всякаго вектора указать направленіе угловой скорости его девіаціи.

Формула (184) показываетъ, что векторы, имѣющіе равныя скорости удлиненій ε, образуютъ конусъ втораго порядка (Cauchy)

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon)x^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon)y^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon)z^2 = 0.$$

Этотъ конусъ играетъ важную роль въ вопросѣ о девіаціи. А именно, формулы (263) показываютъ, что девіація всякаго вектора происходитъ нормально къ соотвѣтствующему этому вектору конусу равныхъ скоростей удлиненій, такъ какъ нормаль къ этому конусу образуетъ съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ пропорціональны величинамъ $v_{\sigma x}$, $v_{\sigma y}$, $v_{\sigma z}$. Принимая это во вниманіе, мы можемъ опредѣлить систему конусовъ, по которымъ въ данный элементъ времени происходитъ движеніе центральныхъ векторовъ[1]). Эта система конусовъ должна быть ортогональна къ системѣ конусовъ равныхъ скоростей удлиненій. Чтобы составить дифференціальное уравненіе этой системы конусовъ, примемъ во вниманіе, что нормаль къ поверхности одного изъ

---

[1]) См. Жуковскій, Кинематика жидкаго тѣла.

этихъ конусовъ совпадаетъ, съ одной стороны, съ направленіемъ σ и косинусы ея угловъ съ осями координатъ пропорціональны поэтому, по формуламъ (265), величинамъ

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)yz, \quad (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)zx, \quad (\varepsilon_1 - \varepsilon)xy;$$

а съ другой стороны эта нормаль перпендикулярна къ перемѣщенію точки. Итакъ можно написать:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)yz\,dx + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)zx\,dy + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)xy\,dz = 0.$$

Раздѣляя это выраженіе на (xyz) и интегрируя, найдемъ:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)lgx + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)lgy + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)lgz = пост.$$

или

$$x^{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}\,y^{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}\,z^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = пост. \tag{266}$$

Чтобы замѣтить себѣ положеніе этихъ конусовъ, предположимъ, что

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

и слѣдовательно

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) > 0, \quad (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) < 0, \quad (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) > 0.$$

Тогда, полагая въ уравненіи (266) послѣдовательно x, y и z равными нулю, увидимъ, что всѣ конусы проходятъ черезъ оси (z) и (x). Эти конусы касаются притомъ плоскостей (xy) и (yz), какъ легко убѣдиться, разсматривая линіи пересѣченія конусовъ съ плоскостью, перпендикулярною къ оси (x), и съ плоскостью, перпендикулярною къ оси (z). Если на шарѣ, имѣющемъ своимъ центромъ центръ деформаціи, начертить систему слѣдовъ конусовъ, то мы получимъ наглядное представленіе о томъ, какъ происходитъ девіація всѣхъ векторовъ: концы этихъ векторовъ двигаются въ данный элементъ времени по одному изъ этихъ слѣдовъ отъ оси наименьшей къ оси наибольшей скорости удлиненій.

Опредѣленіе конусовъ (266) находится въ связи съ вопросомъ болѣе общаго характера (о самоогибаемыхъ линіяхъ и поверхностяхъ), который будетъ разсмотрѣнъ въ V-й главѣ.

65. Скорости въ составномъ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы. Приведеніе центровъ раздвиганія, однородной деформаціи и вращенія къ одному общему центру—началу координатъ.

До сихъ поръ мы разлагали скорости коллинеарно-измѣняемой системы въ предположеніи, что центръ раздвиганій, центръ чистой деформаціи и центръ вращенія совпадаютъ въ одной точкѣ, — въ началѣ координатъ. Хотя такое представленіе всегда возможно для всякаго даннаго движенія, но его недостаточно, когда движеніе коллинеарно-измѣняемой системы слагается изъ двухъ такихъ движеній, которыя не имѣютъ общаго центра раздвиганій, общаго центра однородной деформаціи или общаго центра вращеній. Въ такомъ случаѣ для опредѣленія параметровъ скоростей составнаго движенія проще всего каждое изъ слагаемыхъ движеній преобразовать, приведя всѣ центры къ общему центру — началу координатъ, и потомъ разсмотрѣть сложеніе скоростей въ такихъ преобразованныхъ слагаемыхъ движеніяхъ. Итакъ обратимся къ приведенію центровъ. Пусть будутъ (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) и (ξ_3, η_3, ζ_3) соотвѣтственно координаты центра раздвиганій, центра однородной деформаціи и центра вращеній. Скорости въ движеніи, въ которомъ эти центры не совпадаютъ, опредѣляются очевидно формулами:

$$
\begin{aligned}
v_x = (x - \xi_1)\,[\,P(x - \xi_1) + Q(y - \eta_1) + R(z - \zeta_1)\,] \\
+ \varepsilon_1 (x - \xi_2) + k_3 (y - \eta_2) + k_2 (z - \zeta_2) \\
+ q(z - \zeta_3) - r(y - \eta_3) + S_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_y = (y - \eta_1)\,[\,P(x - \xi_1) + Q(y - \eta_1) + R(z - \zeta_1)\,] \\
k_3 (x - \xi_2) + \varepsilon_2 (y - \eta_2) + k_1 (z - \zeta_2) \\
+ r(x - \xi_3) - p(z - \zeta_3) + S_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_z = (z - \zeta_1)\,[\,P(x - \xi_1) + Q(y - \eta_1) + R(z - \zeta_1)\,] \\
+ k_2 (x - \xi_2) + k_1 (y - \eta_2) + \varepsilon_3 (z - \zeta_2) \\
+ p(y - \eta_3) - q(x - \xi_3) + S_3.
\end{aligned}
$$

Представляя эти формулы въ обыкновенномъ видѣ:

$$v_x = x\,(P'x + Q'y + R'z) + \varepsilon_1'x + k_3'y + k_2'z + q'z - r'y + S_1',$$

$$v_y = y\,(P'x + Q'y + R'z) + k_3'x + \varepsilon_2'y + k_1'z + r'x - p'z + S_2',$$

$$v_z = z\,(P'x + Q'y + R'z) + k_2'x + k_1'y + \varepsilon_3'z + p'y - q'x + S_3',$$

находимъ: 1)

$$P' = P,\ Q' = Q,\ R' = R,$$

т. е. *отъ переноса центра раздвиганій въ начало координатъ величина и направленіе скорости раздвиганій не мѣняются и переносъ центра однородной деформаціи и центра вращеній на скорости раздвиганій вліянія не оказываетъ.* 2)

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - (P\xi_1 + Q\eta_1 + R\zeta_1) - P\xi_1,$$
$$\varepsilon_2' = \varepsilon_2 - (P\xi_1 + Q\eta_1 + R\zeta_1) - Q\eta_1,$$
$$\varepsilon_3' = \varepsilon_3 - (P\xi_1 + Q\eta_1 + R\zeta_1) - R\zeta_1;$$
$$k_1' = k_1 - \tfrac{1}{2}(Q\zeta_1 + R\eta_1),$$
$$k_2' = k_2 - \tfrac{1}{2}(R\xi_1 + Q\zeta_1),$$
$$k_3' = k_3 - \tfrac{1}{2}(P\eta_1 + Q\xi_1).$$

Послѣднія шесть формулъ показываютъ, что *переносъ центра однородной деформаціи на скорости удлиненій и скорости сдвиганій вліянія не оказываетъ, но эти скорости измѣняются въ зависимости отъ скорости раздвиганій и отъ положенія центра раздвиганій.* Такъ напр. скорости главныхъ удлиненій уменьшаются: *a*) на общую скорость удлиненій

$$P\xi_1 + Q\eta_1 + R\zeta_1 = \frac{v_1}{\rho_1},$$

гдѣ v_1 скорость даннаго центра раздвиганій при простомъ раздвиганіи системы изъ начала координатъ, а ρ_1 разстояніе этого центра отъ начала координатъ; *b*) на скорости удлиненій, равныя соотвѣтственно скоростямъ удлиненій того-же вектора ρ_1 при слагаемыхъ по координатнымъ осямъ раздвиганіяхъ изъ начала координатъ. 3)

$$p' = p - \tfrac{1}{2}(Q\zeta_1 - R\eta_1),$$
$$q' = q - \tfrac{1}{2}(R\xi_1 - P\zeta_1),$$
$$r' = r - \tfrac{1}{2}(P\eta_1 - Q\xi_1).$$

Такимъ образомъ и *угловая скорость при переносѣ центровъ измѣняется только въ зависимости отъ скорости раздвиганія и поло-*

женія его центра. Добавочная угловая скорость перпендикулярна къ скорости даннаго раздвиганія и къ вектеру ρ_1 и равна

$$\tfrac{1}{2}\, \rho_1\, \sigma .\, sin\, (\rho_1, \sigma).$$

4) Наконецъ переносъ всѣхъ центровъ въ начало координатъ вліяетъ слѣдующимъ образомъ на поступательную слагаемую скорости:

$$S_1' = S_1 + \xi_1 (P\xi_1 + Q\eta_1 + R\zeta_1) - (\varepsilon_1\xi_2 + k_3\eta_2 + k_2\zeta_2) - (q\zeta_3 - r\eta_3),$$

$$S_2' = S_2 + \eta_1 (P\xi_1 + Q\eta_1 + R\zeta_1) - (k_3\xi_2 + \varepsilon_2\eta_2 + k_1\zeta_2) - (r\xi_3 - p\zeta_3),$$

$$S_3' = S_3 + \zeta_1 (P\xi_1 + Q\eta_1 + R\zeta_1) - (k_2\xi_2 + k_1\eta_2 + \varepsilon_3\zeta_2) - (p\eta_3 - q\xi_3).$$

Къ первоначальной поступательной скорости прикладываются геометрически: *a*) скорость центра даннаго раздвиганія при раздвиганіи изъ начала координатъ, *b*) скорость, равная и прямо противуположная скорости даннаго центра однородной деформаціи при движеніи системы, состоящемъ изъ однородной деформаціи съ центромъ въ началѣ координатъ, и *c*) скорость, равная и прямо противуположная скорости даннаго центра вращенія при вращеніи системы около оси, параллельной данной, но проходящей черезъ начало координатъ, съ данною угловою скоростью.

66. Сложеніе скоростей при совпаденіи всѣхъ центровъ слагаемыхъ движеній.

Замѣтивъ себѣ правила переноса центра раздвиганій, центра однородной деформаціи и центра вращенія, мы можемъ вопросъ о сложеніи скоростей всегда свести къ тому случаю, когда всѣ слагаемыя движенія имѣютъ общій центръ, находящійся въ началѣ координатъ. Тогда правила сложенія скоростей выражаются весьма просто.

Означая соотвѣтственно значками (′) и (″) скорости и всѣ параметры скоростей слагаемыхъ движеній, имѣемъ:

$$v_x' = x\,(P'x + Q'y + R'z) + \varepsilon_1'x + k_3'y + k_2'z + q'z - r'y + S_1',$$

$$v_y' = y\,(P'x + Q'y + R'z) + k_3'x + \varepsilon_2'y + k_1'z + r'x - p'z + S_2',$$

$$v_z' = z\,(P'x + Q'y + R'z) + k_2'x + k_1'y + \varepsilon_3'z + p'y - q'x + S_3';$$

$$v_x'' = x\,(P''x + Q''y + R''z) + \varepsilon_1''x + k_3''y + k_2''z + q''z - r''y + S_1'',$$

$$v_y'' = y\,(P''x + Q''y + R''z) + k_3''x + \varepsilon_2''y + k_1''z + r''x - p''z + S_2'',$$

$$v_z'' = z\,(P''x + Q''y + R''z) + k_2''x + k_1''y - \varepsilon_3''z + p''y - q''x + S_3''.$$

Складывая соотвѣтственно проекціи скоростей, для составнаго движенія найдемъ:

$$v_x = x\,[\,(P' + P'')\,x + (Q' + Q'')\,y + (R' + R'')\,z\,]$$
$$+ (\varepsilon_1' + \varepsilon_1'')\,x + (k_3' + k_3'')\,y + (k_2' + k_2'')\,z,$$
$$+ (q' + q'')\,z - (r' + r'')\,y + S_1' + S_1'',$$
$$v_y = y\,[\,(P' + P'')\,x + (Q' + Q'')\,y + (R' + R'')\,z\,]$$
$$+ (k_3' + k_3'')\,x + (\varepsilon_2' + \varepsilon_2'')\,y + (k_1' + k_1'')\,z,$$
$$+ (r' + r'')\,x - (p' + p'')\,z + S_2' + S_2'',$$
$$v_z = z\,[\,(P' + P'')\,x + (Q' + Q'')\,y - (R' + R'')\,z\,]$$
$$+ (k_2' + k_2'')\,x + (k_1' + k_1'')\,y + (\varepsilon_3' + \varepsilon_3'')\,z$$
$$+ (p' + p'')\,y - (q' + q'')\,x + S_3' + S_3''.$$

Отсюда заключаемъ, что при совпаденіи центровъ:

1) *Скорость сложнаго раздвиганія равна геометрической суммѣ скоростей слагаемыхъ раздвиганій.*
2) Скорости удлиненій по координатнымъ осямъ равны алгебраическимъ суммамъ соотвѣтственныхъ слагаемыхъ скоростей удлиненій.
3) Скорости сдвиганій въ координатныхъ плоскостяхъ равны алгебраическимъ суммамъ соотвѣтственныхъ скоростей слагаемыхъ сдвиганій.
4) Угловая скорость равна геометрической суммѣ угловыхъ скоростей слагаемыхъ вращеній.
5) Поступательная скорость равна геометрической суммѣ поступательныхъ скоростей слагаемыхъ движеній.

Эти результаты, въ связи съ формулами предыдущаго §, позволяютъ судить о томъ, какъ выражается скорость въ такомъ сложномъ движеніи, въ которомъ различные центры между собою не совпадаютъ. Не останавливаясь на этомъ, закончимъ главу двумя частными вопросами относительно сложенія скоростей.

67. Сложеніе скоростей раздвиганій изъ разныхъ центровъ.

Изъ двухъ предыдущихъ §§ видно, что скорость раздвиганія въ движеніи, состоящемъ изъ двухъ простыхъ раздвиганій, опредѣляется

геометрическою суммою скоростей слагаемыхъ раздвиганій независимо отъ того, будутъ-ли центры этихъ послѣднихъ раздвиганій совпадать или нѣтъ. Но если центры данныхъ раздвиганій не совпадаютъ, то вообще говоря сложное движеніе не будетъ уже простымъ раздвиганіемъ. Въ главѣ II-й, § 32, было показано, при какихъ условіяхъ два конечныхъ раздвиганія изъ разныхъ центровъ даютъ опять простое раздвиганіе. Но такъ какъ для конечныхъ перемѣщеній не всегда имѣютъ мѣсто тѣ-же результаты, какъ для безконечно-малыхъ перемѣщеній или для скоростей (напр. вліяніе на сложное перемѣщеніе порядка слагаемыхъ перемѣщеній, сложеніе двухъ чистыхъ однородныхъ деформацій и пр.), то является вопросъ, не будетъ-ли кромѣ тѣхъ случаевъ, которые найдены для конечныхъ раздвиганій, еще другихъ, въ которыхъ скорости составнаго перемѣщенія представляются скоростями чистаго раздвиганія. Во всякомъ случаѣ изслѣдованіе этого вопроса непосредственно въ приложеніи къ скоростямъ является не лишнимъ.

Пусть будутъ ξ', η', ζ' и ξ'', η'', ζ'' координаты центровъ данныхъ раздвиганій, а Ξ, H, Z координаты искомаго центра сложнаго раздвиганія. Условіе, чтобы составное движеніе было опять простымъ раздвиганіемъ, опредѣляется требованіемъ, чтобы равенства

$$(x-\xi')[P'(x-\xi')+Q'(y-\eta')+R'(z-\zeta')]+(x-\xi'')[P''(x-\xi'')+Q''(y-\eta'')+R''(z-\zeta'')]$$
$$=(x-\Xi)\,[\,P\,(x-\Xi)+Q\,(y-\mathrm{H})+R\,(z-\mathrm{Z})\,],$$
$$(y-\eta')[P'(x-\xi')+Q'(y-\eta')+R'(z-\zeta')]+(y-\eta'')[P''(x-\xi'')+Q''(y-\eta'')+R''(z-\zeta'')]$$
$$=(y-\mathrm{H})\,[P\,(x-\Xi)+Q\,(y-\mathrm{H})+R\,(z-\mathrm{Z})\,],$$
$$(z-\zeta')[P'(x-\xi')+Q'(y-\eta')+R'(z-\zeta')]+(z-\zeta'')[P''(x-\xi'')+Q''(y-\eta''+R''(z-\zeta'')]$$
$$=(z-\mathrm{Z})\,[P\,(x-\Xi)+Q\,(y-\mathrm{H})+R\,(z-\mathrm{Z})\,]$$

удовлетворялись при всякихъ значеніяхъ координатъ. Это требованіе даетъ слѣдующій рядъ зависимостей, которыя должны быть совмѣстны:

(267) $$P=P'+P'',\ Q=Q'+Q'',\ R=R'+R'',$$

(268)
$$2P\Xi+Q\mathrm{H}+R\mathrm{Z}=2P'\xi'+Q'\eta'+R'\zeta'+2P''\xi''+Q''\eta''+R''\zeta'',$$
$$P\Xi+2Q\mathrm{H}+R\mathrm{Z}=P'\xi'+2Q'\eta'+R'\zeta'+P''\xi''+2Q''\eta''+R''\zeta'',$$
$$P\Xi+Q\mathrm{H}+2R\mathrm{Z}=P'\xi'+Q'\eta'+2R'\zeta'+P''\xi''+Q''\eta''+2R''\zeta'',$$

$$QΞ = Q'\xi' + Q''\xi'',\ RΞ = R'\xi' + R''\xi'',$$
$$RH = R'\eta' + R''\eta'',\ PH = P'\eta' + P''\eta'', \tag{269}$$
$$PZ = P'\zeta' + P''\zeta'',\ QZ = Q'\zeta' + Q''\zeta'',$$

$$Ξ(PΞ + QH + RZ) = \xi'(P'\xi' + Q'\eta' + R'\zeta') + \xi''(P''\xi'' + Q''\eta'' + R''\zeta''),$$
$$H(PΞ + QH + RZ) = \eta'(P'\xi' + Q'\eta' + R'\zeta') + \eta''(P''\xi'' + Q''\eta'' + R''\zeta''), \tag{270}$$
$$Z(PΞ + QH + RZ) = \zeta'(P'\xi' + Q'\eta' + R'\zeta') + \zeta''(P''\xi'' + Q''\eta'' + R''\zeta''.$$

Зависимости (267) и (269) даютъ:

$$(Q'R'' - R'Q'')(\xi' - \xi'') = 0,$$
$$(R'P'' - P'R'')(\eta' - \eta'') = 0,$$
$$(P'Q'' - Q'P'')(\zeta' - \zeta'') = 0.$$

Если центры слагаемыхъ раздвиганій не совпадаютъ, то можно предполагать, что ни одна изъ разностей

$$\xi' - \xi'',\ \eta' - \eta'',\ \zeta' - \zeta''$$

не равна нулю; въ противномъ случаѣ можно было-бы вращеніемъ координатныхъ осей достигнуть этого. Слѣдовательно

$$\frac{P''}{P'} = \frac{Q''}{Q'} = \frac{R''}{R'}. \tag{271}$$

Означая эти равныя отношенія черезъ k, будемъ имѣть по формуламъ (269):

$$Ξ = \frac{\xi' + k\,\xi''}{1 + k},\ H = \frac{\eta' + k\,\eta''}{1 + k},\ Z = \frac{\zeta' + k\,\zeta''}{1 + k}. \tag{272}$$

Подставляя эти значенія координатъ въ условія (268), мы увидимъ, что они удовлетворяются сами собою. Условія-же (270) приводятся къ слѣдующимъ:

$$(\xi'' - \xi')\,[P'(\xi'' - \xi') + Q'(\eta'' - \eta') + R'(\zeta'' - \zeta')] = 0,$$
$$(\eta'' - \eta')\,[P'(\xi'' - \xi') + Q'(\eta'' - \eta') + R'(\zeta'' - \zeta')] = 0,$$
$$(\zeta'' - \zeta')\,[P'(\xi'' - \xi') + Q'(\eta'' - \eta') + R'(\zeta'' - \zeta')] = 0.$$

Такъ какъ всѣ три разности между координатами по предположенію не могутъ равняться нулю, то мы имѣемъ условіе:

$$P'(\xi''-\xi')+Q'(\eta''-\eta')+R'(\zeta''-\zeta')=0. \tag{273}$$

Итакъ, *когда центры раздвиганій не совпадаютъ, то скорости сложнаго движенія будутъ скоростями въ простомъ раздвиганіи въ томъ случаѣ, если* (271) *скорости слагаемыхъ раздвиганій между собою параллельны и если* (273) *центры слагаемыхъ раздвиганій лежатъ на прямой, перпендикулярной къ общему направленію данныхъ скоростей раздвиганія.*

Центръ составнаго раздвиганія будетъ при этомъ находиться на этой прямой, раздѣляя ее (272) въ отношеніи, обратномъ отношенію скоростей данныхъ раздвиганій, а скорость составнаго раздвиганія будетъ равна алгебраической суммѣ скоростей данныхъ раздвиганій и будетъ имъ параллельна. Въ случаѣ, когда скорости слагаемыхъ раздвиганій направлены прямо противуположно, то центръ составнаго раздвиганія будетъ *внѣшнимъ образомъ* дѣлить въ данномъ отношеніи разстояніе между данными центрами и скорость составнаго раздвиганія будетъ направлена въ сторону большей изъ данныхъ скоростей слагаемыхъ раздвиганій. Такимъ образомъ другихъ случаевъ, когда движеніе, сложное изъ двухъ раздвиганій, имѣетъ скорости, соотвѣтствующія опять простому раздвиганію, кромѣ найденныхъ для конечныхъ перемѣщеній, не оказывается.

68. Условія, чтобы при сложеніи простаго раздвиганія съ движеніемъ однородно-измѣняемой системы, когда притомъ центры слагаемыхъ движеній не совпадаютъ, получались опять скорости простаго раздвиганія.

Для удовлетворенія этимъ условіямъ нужно, чтобы слѣдующія зависимости были тожественны при всякихъ значеніяхъ координатъ:

$$\begin{aligned}
&(x-\xi_1)\,[P(x-\xi_1)+Q(y-\eta_1)+R(z-\zeta_1)]\\
&+\varepsilon_1(z-\xi_2)+k_3(y-\eta_2)+k_2(z-\zeta_2)+q(z-\zeta_3)-r(y-\eta_3)\\
&=(x-\Xi)\,[P(x-\Xi)+Q(y-\mathrm{H})+R(z-\mathrm{Z})],\\
&(y-\eta_1)\,[P(x-\xi_1)+Q(y-\eta_1)+R(z-\zeta_1)]\\
&+k_3(x-\xi_2)+\varepsilon_2(y-\eta_2)+k_1(z-\zeta_2)+z(x-\xi_3)-p(z-\zeta_3)\\
&=(y-\mathrm{H})\,[P(x-\Xi)+Q(y-\mathrm{H})+R(z-\mathrm{Z})],
\end{aligned} \tag{274}$$

$$(z-\zeta_1)[P(x-\xi_1)+Q(y-\eta_1)+R(z-\zeta_1)]$$
$$+k_2(x-\xi_2)+k_1(y-\eta_2)+\varepsilon_3(z-\zeta_2)+p(y-\eta_3)-q(x-\xi_3) \quad (274)$$
$$=(z-\mathrm{Z})[P(x-\Xi)+Q(y-\mathrm{H})+R(z-\mathrm{Z})].$$

Здѣсь скорости искомаго раздвиганія тѣ-же самыя, какъ и данныя; потому-что, какъ мы знаемъ изъ предыдущаго, на скорость раздвиганія присоединеніе другихъ параметровъ скоростей вліянія не оказываетъ. Условія (274) приводятъ къ слѣдующимъ зависимостямъ:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1-2P\xi_1-Q\eta_1-R\zeta_1=-(2P\Xi+Q\mathrm{H}+R\mathrm{Z}),\\ &\varepsilon_2-P\xi_1-2Q\eta_1-R\zeta_1=-(P\Xi+2Q\mathrm{H}+R\mathrm{Z}),\\ &\varepsilon_3-P\xi_1-Q\eta_1-2R\zeta_1=-(P\Xi+Q\mathrm{H}+2R\mathrm{Z}),\end{aligned} \quad (275)$$

$$\begin{aligned} &k_3-Q\xi_1-r=-Q\Xi,\ k_2-R\xi_1+q=-R\Xi,\\ &k_1-R\eta_1-p=-R\mathrm{H},\ k_3-P\eta_1+r=-P\mathrm{H},\\ &k_2-P\zeta_1-q=-P\mathrm{Z},\ k_1-Q\zeta_1+p=-Q\mathrm{Z},\end{aligned} \quad (276)$$

$$\begin{aligned} &\xi_1(P\xi_1+Q\eta_1+R\zeta_1)-\varepsilon_1\xi_2-k_3\eta_2-k_2\zeta_2-q\zeta_3+r\eta_3\\ &\qquad=\Xi(P\Xi+Q\mathrm{H}+R\mathrm{Z}),\\ &\eta_1(P\xi_1+Q\eta_1+R\zeta_1)-k_3\xi_2-\varepsilon_2\eta_2-k_1\zeta_2-r\xi_3+p\zeta_3\\ &\qquad=\mathrm{H}(P\Xi+Q\mathrm{H}+R\mathrm{Z}),\\ &\zeta_1(P\xi_1+Q\eta_1+R\zeta_1)-k_2\xi_2-k_1\eta_2-\varepsilon_3\zeta_2-q\eta_3+q\xi_3\\ &\qquad=\mathrm{Z}(P\Xi+Q\mathrm{H}+R\mathrm{Z}).\end{aligned} \quad (277)$$

Три изъ этихъ 12 зависимостей должны служить для опредѣленія координатъ Ξ, H, Z искомаго центра раздвиганія; остальныя 9 зависимостей должны удовлетворяться надлежащимъ подборомъ данныхъ параметровъ, число которыхъ равно 21. Отсюда видно, что заданнымъ требованіямъ можно удовлетворить различнымъ образомъ. Одно изъ простѣйшихъ рѣшеній будетъ слѣдующее. Исключая изъ (276) координаты Ξ, H, Z, находимъ такія условія для заданныхъ параметровъ:

$$\begin{aligned} &(k_2+q)\,Q=(k_3-r)\,R,\\ &(k_3+r)\,R=(k_1-p)\,P,\\ &(k_1+p)\,P=(k_2-q)\,Q.\end{aligned} \quad (278)$$

Отсюда получаемъ между прочимъ:

$$pP + qQ + rR = 0,$$

т. е. требованіе, чтобы угловая скорость была перпендикулярна къ скорости раздвиганія. Когда условія (278) выполнены и входящія въ нихъ величины соотвѣтственнымъ образомъ выбраны, мы получаемъ для Ξ, H, Z изъ уравненій (276) по два тожественныхъ выраженія:

$$\Xi = \xi_1 - \frac{k_3 - r}{Q} = \xi_1 - \frac{k_2 + q}{R},$$

$$\mathrm{H} = \eta_1 - \frac{k_1 - p}{R} = \eta_1 - \frac{k_3 + r}{P},$$

$$\mathrm{Z} = \zeta_1 - \frac{k_2 - q}{P} = \zeta_1 - \frac{k_1 + p}{Q}.$$

Остальныя шесть условій (275) и (277) должны этимъ рѣшеніямъ удовлетворять. Для ε_1, ε_2, ε_3 изъ (275) получаются опредѣленныя значенія, не зависящія отъ положенія центровъ (ξ_1 η_1 ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2) и (ξ_3, η_3, ζ_3); напр. для ε_1 слѣдующее:

$$\varepsilon_1 = \frac{2P}{Q}(k_3 - r) + \frac{Q}{R}(k_1 - p) + \frac{R}{P}(k_2 - q)$$
$$= \frac{2P}{R}(k_2 + q) + \frac{Q}{P}(k_2 + r) + \frac{R}{Q}(k_1 + p).$$

Послѣ этого уравненія (277) могутъ служить для опредѣленія ξ_1, η_1, ζ_1, когда заданы координаты остальныхъ центровъ.

Другіе частные случаи, которыхъ мы уже не будемъ разбирать, могутъ быть разсмотрѣны подобнымъ-же образомъ.

Нѣкоторые частные случаи о сложеніи скоростей или, что то-же самое, о сложеніи безконечно-малыхъ перемѣщеній *однородно-измѣняемой системы* разсмотрѣны Thomson'омъ и Tait'омъ[1]), Жуковскимъ[2]), Ibbetson'омъ[3]) и другими.



[1]) Natural Philosophy, § 183 — 185.
[2]) Кинематика жидкаго тѣла, стр. 29.
[3]) Mathem. theory of elasticity, § 87 и слѣд.

ГЛАВА IV.

Ускоренія коллинеарно-измѣняемой системы.

---

69. Общія формулы для ускореній точекъ коллинеарно-измѣняемой системы и разложеніе ихъ на составныя части.

Мы уже видѣли, что переходъ отъ конечныхъ перемѣщеній къ скоростямъ въ коллинеарно-измѣняемой системѣ не представляетъ аналогіи съ тѣмъ, что мы имѣемъ въ однородно-измѣняемой системѣ, гдѣ сохраняется линейность формулъ. То-же самое можно замѣтить и относительно ускореній. Въ то время, какъ въ однородно-измѣняемой системѣ проекціи ускореній выражаются опять линейными функціями координатъ и слѣдовательно сохраняютъ тотъ-же видъ, какъ проекціи скоростей,— въ коллинеарно-измѣняемой системѣ *формулы для ускореній* усложняются въ сравненіи съ формулами для скоростей и *выражаются уже функціями третьей степени отъ координатъ.*

Чтобы изслѣдовать эти ускоренія, продифференцируемъ уравненія (172) по t, подставляя при этомъ вмѣсто производныхъ отъ координатъ по времени опять выраженія (172). Первое изъ этихъ уравненій даетъ:

$$\begin{aligned} w_x = \frac{dv_x}{dt} = &(Px + Qy + Rz)v_x + (P'x + Q'y + R'z)x \\ &+ (Pv_x + Qv_y + Rv_z)x \qquad (279) \\ &+ (L_1 v_x + M_1 v_y + N_1 v_z) + (L_1' x + M_1' y + N_1' z + S_1') \\ = &\, 2x(Px + Qy + Rz)^2 + x(P'x + Q'y + R'z) \\ &+ (L_1 x + M_1 y + N_1 z + S_1)(Px + Qy + Rz) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ x[P(L_1x + M_1y + N_1z + S_1) + Q(L_2x + M_2y + N_2z + S_2) \\
(279)\quad &\qquad + R(L_3x + M_3y + N_3z + S_3)] \\
&+ (L_1x + M_1y + N_1z)(Px + Qy + Rz) \\
&+ L_1(L_1x + M_1y + N_1z + S_1) + M_1(L_2x + M_2y + N_2z + S_2) \\
&\qquad + N_1(L_3x + M_3y + N_3z + S_3) \\
&+ L_1'x + M_1'y + N_1'z + S_1'.
\end{aligned}
$$ [1])

Подобныя-же формулы получатся для w_y и w_z; мы не будемъ ихъ теперь выписывать.

Эти формулы можно разсматривать съ трехъ различныхъ точекъ зрѣнія: 1) расположить по степенямъ координатъ:

$$
\begin{aligned}
w_x &= 2x(Px + Qy + Rz)^2 \\
&+ \{2(L_1x + M_1y + N_1z)(Px + Qy + Rz) + x(P'x + Q'y + R'z) \\
&\qquad + x[P(L_1x + M_1y + N_1z) + Q(L_2x + M_2y + N_2z) \\
&\qquad + R(L_3x + M_3y + N_3z)]\} \\
&+ [S_1(Px + Qy + Rz) + (PS_1 + QS_2 + RS_3)x + (L_1'x + M_1'y + N_1'z) \\
&\qquad + L_1(L_1x + M_1y + N_1z) + M_1(L_2x + M_2y + N_2z) \\
&\qquad + N_1(L_3x + M_3y + N_3z)] \\
&+ (S_1' + L_1S_1 + M_1S_2 + N_1S_3);
\end{aligned}
$$

2) разложить формулу (279) и ей подобныя: a) на члены съ производными коэффиціентовъ скоростей, b) на члены, содержащіе множителями проекціи полныхъ скоростей, и c) на члены, остающіеся послѣ этого; 3) выдѣлить въ этихъ формулахъ: a) члены, опредѣляющіе ускореніе въ чистомъ раздвиганіи, b) члены, соотвѣтствующіе ускоренію однородно-измѣняемой системы, и c) члены смѣшанные, т. е. зависящіе одновременно какъ отъ раздвиганія такъ и отъ другихъ элементовъ движенія. Для уясненія свойствъ ускоренія въ зависимости отъ основныхъ кинематическихъ элементовъ послѣднее разложеніе очевидно наиболѣе важное. Мы и будемъ его придерживаться. Чтобы сдѣлать это разложеніе, составимъ выраженія для проекцій ускореній въ указанныхъ двухъ частныхъ случаяхъ движенія.

Дифференцируя по времени формулы для скоростей въ чистомъ раздвиганіи (173), получимъ:

[1]) Здѣсь значкомъ (′) обозначены производныя по времени.

$$
\begin{aligned}
w_x' = \frac{dv_x'}{dt} &= v_x'(Px + Qy + Rz) \\
&\quad + x(P'x + Q'y + R'z) + x(Pv_x' + Qv_y' + Rv_z') \qquad (280) \\
&= 2x(Px + Qy + Rz)^2 + x(P'x + Q'y + R'z)
\end{aligned}
$$

и двѣ подобныя имъ формулы для w_y' и w_z'. Формулы (174) для скоростей однородно-измѣняемой системы даютъ точно такъ-же:

$$
\begin{aligned}
w_x'' = \frac{dv_x''}{dt} &= L_1'x + M_1'y + N_1'z + S_1' + L_1 v_x'' + M_1 v_y'' + N_1 v_z'' \\
&= L_1'x + M_1'y + N_1'z + S_1' + L_1(L_1 x + M_1 y + N_1 z + S_1) \qquad (281) \\
&\quad + M_1(L_2 x + M_2 y + N_2 z + S_2) + N_1(L_3 x + M_3 y + N_3 z + S_3)
\end{aligned}
$$

и подобныя-же формулы для w_y'' и w_z''. Сравнивая (280) и (281) съ (279), можно написать:

$$
\begin{aligned}
w_x &= w_x' + w_x'' \\
&\quad + 2(L_1 x + M_1 y + N_1 z)(Px + Qy + Rz) \qquad (282) \\
&\quad + x[P(L_1 x + M_1 y + N_1 z + S_1) + Q(L_2 x + M_2 y + N_2 z + S_2) \\
&\qquad + R(L_3 x + M_3 y + N_3 z + S_3)] \\
&\quad + S_1(Px + Qy + Rz).
\end{aligned}
$$

70. Ускоренія въ чистомъ раздвиганіи.

Формулы (280) показываютъ, что ускореніе въ чистомъ раздвиганіи слагается изъ двухъ частей, изъ которыхъ одна зависитъ отъ тѣхъ-же коэффиціентовъ, какъ скорость раздвиганія, а другая отъ производныхъ по времени отъ этихъ коэффиціентовъ, — аналогично тому, какъ это имѣетъ мѣсто въ движеніи твердаго тѣла. Означая эти отдѣльныя ускоренія черезъ w_1' и w_2', а скорость въ чистомъ раздвиганіи черезъ v', можно написать:

$$
w_{1x}' = 2\frac{v_x'^2}{x}, \quad w_{1y}' = 2\frac{v_y'^2}{y}, \quad w_{1z}' = 2\frac{v_z'^2}{z}. \qquad (283)
$$

Принимая во вниманіе, что

$$
\frac{v_x'^2}{x^2} = \frac{v_y'^2}{y^2} = \frac{v_z'^2}{z^2} = \frac{v'^2}{\rho^2}, \qquad (284)
$$

гдѣ ρ разстояніе точки отъ центра раздвиганія, имѣемъ также:

$$\frac{w_{1x}'}{x} = \frac{w_{1y}'}{y} = \frac{w_{1z}'}{z} = \frac{w_1'}{\rho};$$

и поэтому изъ (283) и (284) находимъ:

$$(285) \qquad w_1' = 2\frac{v'^2}{\rho}.$$

Это ускореніе, аналогичное ускоренію равномѣрнаго вращательнаго движенія, можно назвать *ускореніемъ равномѣрнаго раздвиганія;* потому-что ускореніе въ чистомъ раздвиганіи состоитъ изъ одного этого члена, если P, Q, R постоянныя величины, т. е. если скорость раздвиганія постоянна по величинѣ и направленію.

Ускореніе w_2' составлено совершенно такъ-же, какъ скорость въ чистомъ раздвиганіи, только коэффиціенты P, Q, R замѣнены ихъ производными. Ускореніе w' можетъ состоять изъ одного этого ускоренія w_2' только въ такіе моменты, когда P, Q, R равны нулю, т. е., когда раздвиганіе начинается изъ состоянія покоя системы. Это ускореніе можно назвать поэтому *ускореніемъ начальнаго раздвиганія.*

Нужно замѣтить, что эти оба ускоренія w_1' и w_2' всегда направлены по одной прямой линіи, проходящей черезъ центръ раздвиганія, если предполагать, какъ мы теперь дѣлаемъ, что центръ раздвиганія не измѣняетъ своего положенія. Ниже мы увидимъ (§ 77), какъ составляется ускореніе, если положеніе центра раздвиганія мѣняется съ теченіемъ времени.

Величину

$$(286) \qquad \psi = \sqrt{P'^2 + Q'^2 + R'^2}$$

можно, по аналогіи со скоростью раздвиганія σ, назвать *ускореніемъ раздвиганія.*

Относительно распредѣленія ускореній при чистомъ раздвиганіи системы замѣтимъ слѣдующее. Полагая

$$(287) \qquad 2(Px + Qy + Rz)^2 + (P'x + Q'y + R'z) = U,$$

изъ (280) имѣемъ

$$w' = \rho U.$$

Во всѣхъ точкахъ поверхности втораго порядка

$$U = пост. \tag{288}$$

ускореніе пропорціонально разстоянію точки отъ центра раздвиганій. Поверхность (288) представляетъ собою ***параболическій цилиндръ***, производящія котораго параллельны плоскостямъ:

$$PX + QY + RZ = 0, \tag{289}$$

$$P'X + Q'Y + R'Z = 0, \tag{290}$$

т. е. перпендикулярны къ направленіямъ скорости и ускоренія раздвиганій. Преобразовывая данную координатную систему въ новую (x', y', z'), въ которой плоскость $(y'z')$ совпадаетъ съ плоскостью (289), а плоскость $(z'x')$ съ плоскостью (290), можно написать:

$$Px + Qy + Rz = mx',$$
$$P'x + Q'y + R'z = ny'.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе (287), получимъ уравненіе направляющей параболы въ плоскости $(x'y')$:

$$2m^2x'^2 + ny' = U = пост. \tag{291}$$

Такъ какъ m и n суть величины, зависящія только отъ коэффиціентовъ уравненій (289) и (290) и слѣдовательно одинаковыя при преобразованіи уравненій всѣхъ цилиндровъ (288), то изъ уравненій (291) можно заключить, что параметры всѣхъ параболъ (291) одинаковы и оси ихъ совпадаютъ; параболы различаются положеніями вершинъ, образующихъ притомъ прямую линію, параллельную оси (y').

71. Ускореніе въ движеніи системы безъ раздвиганій.

Ускореніе однородно-измѣняемой системы было изслѣдовано Durrande'омъ[1]). Это ускореніе можетъ быть разсматриваемо состоящимъ изъ трехъ слагаемыхъ, изъ которыхъ одно зависитъ исключительно отъ деформаціи системы, другое отъ перемѣщенія системы безъ деформаціи и третье, смѣшанное, содержитъ какъ параметры деформаціи такъ и параметры перемѣщенія.

---

[1]) Annales scientifiques de l'Ecole Normale. 2 сер., т. III, 1874 г.

Нужно замѣтить, что результаты Durrande'а не имѣютъ самаго общаго характера, потому-что онъ исходитъ изъ такихъ формулъ для скоростей однородно-измѣняемой системы, въ которыхъ оси координатъ предполагаются направленными по главнымъ осямъ деформаціи. Такимъ образомъ Durrande, переходя къ ускореніямъ дифференцированіемъ, дѣлаетъ, повидимому самъ не замѣчая этого, частное предположеніе, что оси деформаціи сохраняютъ свое направленіе въ два послѣдовательныхъ элемента времени. Чтобы избѣжать этого, необходимо или взять формулы для скоростей отнесенными къ произвольнымъ координатнымъ осямъ, т. е. ввести въ разсмотрѣніе кромѣ удлиненій и сдвиганія (см. § 45), или отдѣльно вычислить ускореніе, зависящее отъ перемѣны направленія главныхъ осей деформаціи. Помимо этого у Durrande'а находится ошибка въ выраженіи той слагаемой ускоренія, которая зависитъ отъ поступательнаго движенія системы; эта ошибка обусловливается тѣмъ, что у Durrande'а не принимается во вниманіе перемѣна въ положеніи мгновенной оси вращенія, а предполагается, что она въ оба элемента времени проходитъ черезъ начало координатъ. Написавъ формулы для ускореній въ общемъ случаѣ, разберемъ отдѣльно ускореніе въ каждомъ изъ частныхъ движеній, изъ которыхъ общее движеніе однородно-измѣняемой системы слагается, а потомъ изъ сравненія полученныхъ выраженій съ общими формулами опредѣлимъ, какъ полное ускореніе изъ ускореній отдѣльныхъ слагаемыхъ движеній составляется.

Пусть будутъ x_0, y_0, z_0 координаты точки, скорость которой $v_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ опредѣляетъ собою поступательную скорость системы. Мы не будемъ эту точку съ самаго начала предполагать находящеюся въ началѣ координатъ, потому-что при опредѣленіи ускореній приходится разсматривать два послѣдовательныхъ элемента времени; поэтому принимать сразу x_0, y_0, z_0 равными нулю неудобно. Такъ какъ, отнявъ у системы поступательную скорость v_0, мы точку $x_0\, y_0\, z_0$ привели-бы въ состояніе покоя, то очевидно эту точку нужно разсматривать, какъ центръ деформаціи и вращенія, и поэтому въ формулахъ для скоростей однородно-измѣняемой системы координаты x, y, z замѣнить разностями $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Итакъ, мы имѣемъ:

$$v_x'' = v_{0x}'' + \varepsilon_1(x - x_0) + q(z - z_0) - r(y - y_0) + k_2(z - z_0) + k_3(y - y_0)$$

$$v_y'' = v_{0y}'' + \varepsilon_2(y-y_0) + r(x-x_0) - p(z-z_0)$$
$$+ k_3(x-x_0) + k_1(z-z_0)$$

$$v_z'' = v_{0z}'' + \varepsilon_3(z-z_0) + p(y-y_0) - q(x-x_0)$$
$$+ k_1(y-y_0) + k_2(x-x_0).$$

Дифференцируя эти формулы и подставляя вмѣсто $\frac{d(x-x_0)}{dt}$, $\frac{d(y-y_0)}{dt}$, $\frac{d(z-z_0)}{dt}$ выраженія $v_x''-v_{0x}''$, $v_y''-v_{0y}''$, $v_z''-v_{0z}''$, взятыя изъ тѣхъ-же формулъ, получимъ:

$$w_x'' = \frac{dv_{0x}''}{dt} + \frac{dq}{dt}(z-z_0) - \frac{dr}{dt}(y-y_0)$$
$$+ pq(y-y_0) + pr(z-z_0)$$
$$+ \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1^2\right)(x-x_0) + \frac{dk_2}{dt}(z-z_0) + \frac{dk_3}{dt}(y-y_0)$$
$$+ (k_2^2 + k_3^2)(x-x_0) + k_1k_2(y-y_0) + k_1k_3(z-z_0)$$
$$+ (\varepsilon_1+\varepsilon_3)q(z-z_0) - (\varepsilon_1+\varepsilon_2)r(y-y_0)$$
$$- (rk_1 + pk_3)(z-z_0) + (qk_1 + pk_2)(y-y_0)$$
$$+ (\varepsilon_1+\varepsilon_3)k_2(z-z_0) + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)k_3(y-y_0)$$

и еще подобныя-же двѣ формулы для w_y'' и w_z'', получаемыя изъ этой круговою перестановкою параметровъ и координатъ. Эти формулы показываютъ, что ускоренія точекъ однородно-измѣняемой системы можно разсматривать состоящими изъ семи слагаемыхъ:

I. ускоренія поступательнаго движенія,
II. ускоренія вращательнаго движенія,
III. ускоренія удлиненій,
IV. ускоренія сдвиганій,
V., VI., VII. трехъ смѣшанныхъ ускореній, въ выраженія которыхъ входятъ попарно параметры вращеній, удлиненій и сдвиганій.

72. Ускоренія, соотвѣтствующія движенію безъ деформаціи.

Ускореніе поступательнаго движенія опредѣляется членами

$$w_{1x}'' = \frac{dv_{0x}''}{dt},\quad w_{1y}'' = \frac{dv_{0y}''}{dt},\quad w_{1z}'' = \frac{dv_{0z}''}{dt}. \tag{292}$$

У Durrande'а слагаемыя ускоренія, не зависящаго отъ координатъ, выражаются членами

$$\varepsilon_1 v_{ox}'' - r v_{oy}'' + q v_{oz}'' + \frac{dv_{ox}''}{dt},$$

$$(293) \qquad \varepsilon_2 v_{oy}'' - p v_{oz}'' + r v_{ox}'' + \frac{dv_{oy}''}{dt},$$

$$\varepsilon_3 v_{oz}'' - q v_{ox}'' + p v_{oy}'' + \frac{dv_{oz}''}{dt}.$$

Это ускореніе у него не равно слѣдовательно ускоренію точки (x_0, y_0, z_0) и зависитъ еще отъ скоростей вращенія и деформаціи. Произошло это отъ того, что Durrande переходитъ къ ускореніямъ отъ формулъ

$$v_x'' = v_{ox}'' + \varepsilon_1 x + qz - ry,$$
$$v_y'' = v_{oy}'' + \varepsilon_2 y + rx - pz,$$
$$v_z'' = v_{oz}'' + \varepsilon_3 z + py - qx,$$

и стало быть предполагаетъ, что центромъ деформаціи служитъ въ оба послѣдовательныхъ элемента времени начало координатъ, и что въ оба эти элемента времени ось вращенія проходитъ черезъ начало координатъ. Поступая такимъ образомъ, слѣдовало-бы еще принять во вниманіе ускореніе, зависящее отъ перемѣны мѣста центра деформаціи и вращенія. Проекціи этого ускоренія выражаются членами, которые соотвѣтственно равны съ обратными знаками первымъ тремъ членамъ въ формулахъ (293). Эти члены поэтому должны сократиться. Дѣйствительно, предполагая на время, что главныя удлиненія происходятъ по осямъ координатъ (чтобы придерживаться формулъ Durrande'а), напишемъ формулы для скоростей для того случая, когда точка (x_0, y_0, z_0) не совпадаетъ съ началомъ координатъ:

$$v_x'' = v_{ox}'' + \varepsilon_1(x - x_0) + q(z - z_0) - r(y - y_0),$$
$$v_y'' = v_{oy}'' + \varepsilon_2(y - y_0) + r(x - x_0) - p(z - z_0),$$
$$v_z'' = v_{oz}'' + \varepsilon_3(z - z_0) + p(y - y_0) - q(x - x_0).$$

Замѣнимъ теперь, сохраняя тѣ-же значенія параметровъ ε_1, ε_2, ε_3, p, q, r, v_{ox}, v_{oy}, v_{oz}, точку (x_0, y_0, z_0) точкою безконечно къ ней близкою $(x_0 + \Delta x_0, y + \Delta y_0, z_0 + \Delta z_0)$, предполагая притомъ, что эта пере-

мѣна произошла въ теченіе времени Δt, и вычислимъ происшедшее отъ этого ускореніе. Скорости точекъ системы при новомъ положеніи центра будутъ:

$$\overline{v}_x'' = v_{ox} + \varepsilon_1(x - x_o - \Delta x_o) + q(z - z_o - \Delta z_o) - r(y - y_o - \Delta y_o),$$
$$\overline{v}_y'' = v_{oy} + \varepsilon_2(y - y_o - \Delta y_o) + r(x - x_o - \Delta x_o) - p(z - z_o - \Delta z_o),$$
$$\overline{v}_z'' = v_{oz} + \varepsilon_3(z - z_o - \Delta z_o) + p(y - y_o - \Delta y_o) - q(x - x_o - \Delta x_o);$$

а для искомаго ускоренія найдемъ:

$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_x'' - v_x''}{\Delta t} = -\varepsilon_1 v_{ox} - q v_{oz} + r v_{oy},$$
$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_y'' - v_y''}{\Delta t} = -\varepsilon_2 v_{oy} - r v_{ox} + p v_{oz},$$
$$\text{пред.}\ \frac{\overline{v}_z'' - v_z''}{\Delta t} = -\varepsilon_3 v_{oz} - p v_{oy} + q v_{ox}.$$

Присоединяя эти выраженія къ формуламъ (293) Durrande'a, мы получимъ выраженія (292).

Такъ какъ ускореніе поступательнаго движенія никакого вліянія такимъ образомъ не оказываетъ на другія слагаемыя ускоренія, то мы будемъ въ дальнѣйшемъ считать ускореніе точки (x_o, y_o, z_o) равнымъ нулю и предполагать, что эта точка находится въ началѣ координатъ. Тогда для ускоренія однородно-измѣняемой системы будемъ имѣть слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned} w_x'' = {} & \frac{dq}{dt}z - \frac{dr}{dt}y - (q^2 + r^2)x + pqy + rpz \\ & + \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1^2\right)x + \frac{dk_2}{dt}z + \frac{dk_3}{dt}y + (k_2^2 + k_3^2)x + k_1k_2y + k_3k_1z \\ & + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)qz - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)ry \\ & - (rk_1 + pk_3)z + (qk_1 + pk_2)y \\ & + (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)k_2z + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)k_3y \end{aligned} \tag{294}$$

и подобныя-же двѣ формулы для w_y'' и w_z''.

2) *Ускореніе вращательнаго движенія* опредѣляется тѣми-же формулами, какъ и для твердаго тѣла:

$$
(295)\qquad
\begin{aligned}
w_{IIx}'' &= \frac{dq}{dt}z - \frac{dr}{dt}y - (q^2 + r^2)x + pqy + rpz,\\
w_{IIy}'' &= \frac{dr}{dt}x - \frac{dp}{dt}z - (r^2 + p^2)y + qrz + pqx,\\
w_{IIz}'' &= \frac{dp}{dt}y - \frac{dq}{dt}z - (p^2 + q^2)z + rpx + qry.
\end{aligned}
$$

Этимъ ускореніемъ мы тоже не будемъ долѣе заниматься; но не будемъ также предполагать вращеніе отсутствующимъ, потому-что его присутствіе оказываетъ вліяніе на ускореніе, зависящее отъ деформаціи.

73. Ускоренія однородной деформаціи.

1) *Ускореніе, соотвѣтствующее удлиненіямъ по осямъ координатъ,* опредѣляется членами:

$$
(296)\qquad
\begin{aligned}
w_{IIIx}'' &= \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1^2\right)x,\\
w_{IIIy}'' &= \left(\frac{d\varepsilon_2}{dt} + \varepsilon_2^2\right)y,\\
w_{IIIz}'' &= \left(\frac{d\varepsilon_3}{dt} + \varepsilon_3^2\right)z.
\end{aligned}
$$

Это ускореніе распредѣлено совершенно такъ-же, какъ скорость чистой деформаціи по осямъ координатъ; только скорости главныхъ удлиненій, ε_1, ε_2, ε_3, замѣняются здѣсь другими коэффиціентами, которые можно назвать ускореніями удлиненій. При опредѣленіи скоростей удлиненій мы имѣли

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt};$$

поэтому

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\varepsilon^2 + \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}.$$

Такимъ образомъ

$$(297)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon^2 = \frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dt^2}$$

есть ускореніе измѣненія длины вектора, дѣленное на эту длину, и можетъ быть поэтому названо ускореніемъ удлиненія [1]).

---

[1]) Durrande. Ann. de l'Ec. Norm. (2) III, стр. 155.

Ускореніе удлиненія по какому-нибудь направленію можетъ быть выражено черезъ ускоренія и скорости удлиненій по главнымъ осямъ деформаціи слѣдующимъ образомъ. Если предполагать, что главныя оси деформаціи направлены по координатнымъ осямъ, то можно написать:

$$\frac{d\rho}{dt} = v \,.\, \cos(v,\rho) = \frac{v_x\, x + v_y\, y + v_z\, z}{\rho} = \frac{\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2}{\rho}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{\frac{d\varepsilon_1}{dt}\, x^2 + \frac{d\varepsilon_2}{dt}\, y^2 + \frac{d\varepsilon_3}{dt}\, z^2 + 2\,(\varepsilon_1{}^2 x^2 + \varepsilon_2{}^2 y^2 + \varepsilon_3{}^2 z^2)}{\rho^2}$$

$$- \frac{(\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2)\,\frac{d\rho}{dt}}{\rho^3}$$

или, означая черезъ α, β, γ углы вектора ρ съ осями деформаціи:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d^2\rho}{dt^2} = \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1{}^2\right)\cos^2\alpha + \left(\frac{d\varepsilon_2}{dt} + \varepsilon_2{}^2\right)\cos^2\beta + \left(\frac{d\varepsilon_3}{dt} + \varepsilon_3{}^2\right)\cos^2\gamma$$

$$+ \varepsilon_1{}^2\cos^2\alpha + \varepsilon_2{}^2\cos^2\beta + \varepsilon_3{}^2\cos^2\gamma - (\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\cos^2\beta + \varepsilon_3\cos^2\gamma)^2.$$

Означая черезъ η_1, η_2, η_3 ускоренія главныхъ удлиненій, а черезъ η ускореніе удлиненія по какому-нибудь направленію, можемъ написать:

$$\eta = \eta_1\cos^2\alpha + \eta_2\cos^2\beta + \eta_3\cos^2\gamma +$$

$$+ (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2\cos^2\beta\cos^2\gamma + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2\cos^2\gamma\cos^2\alpha + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

Мы видимъ отсюда, что не существуетъ полной аналогіи между распредѣленіемъ скорости и ускоренія удлиненій въ системѣ, деформирующейся безъ вращенія и безъ измѣненія направленія главныхъ осей деформаціи: *къ членамъ, аналогичнымъ скорости удлиненія, прибавились еще три члена, которые,* какъ показываютъ формулы (265), *опредѣляютъ* σ^2, *квадратъ девіаціи вектора* ρ *при чистой деформаціи.*

2) Обратимся теперь къ движенію системы, состоящему изъ *сдвиганій* параллельно координатнымъ плоскостямъ *безъ* общаго всей системѣ *вращенія.* Скорости въ этомъ движеніи опредѣляются формулами;

$$v_x'' = k_3 y + k_2 z,$$
$$v_y'' = k_1 z + k_3 x,$$
$$v_z'' = k_2 x + k_1 y;$$

а ускоренія:

$$w_{\text{IV}x}'' = \frac{dk_3}{dt} y + \frac{dk_2}{dt} z + (k_2^2 + k_3^2)\, x + k_1 k_2\, y + k_3 k_1\, z,$$

(298)
$$= (k_2^2 + k_3^2)\, x + \left(\frac{dk_3}{dt} + k_1 k_2\right) y + \left(\frac{dk_2}{dt} + k_3 k_1\right) z,$$
$$w_{\text{IV}y}'' = \left(\frac{dk_3}{dt} + k_1 k_2\right) x + (k_3^2 + k_1^2)\, y + \left(\frac{dk_1}{dt} + k_2 k_3\right) z,$$
$$w_{\text{IV}z}'' = \left(\frac{dk_2}{dt} + k_3 k_1\right) x + \left(\frac{dk_1}{dt} + k_2 k_3\right) y + (k_1^2 + k_2^2)\, z.$$

Эти формулы составлены совершенно такъ-же, какъ формулы для скоростей однородно-измѣняемой системы, подверженной чистой деформаціи, оси которой не совпадаютъ съ осями координатъ. Поэтому и распредѣленіе этого ускоренія можетъ быть изучаемо совершенно такъ-же, какъ распредѣленіе скоростей въ вышеупомянутомъ движеніи [1]). Оно можетъ быть такимъ образомъ разсматриваемо, какъ дифференціальный параметръ нѣкоторой поверхности втораго порядка — *деформатриссы ускореній сдвиганія.* Къ этому ускоренію мы еще вернемся ниже (§ 75).

Замѣтимъ еще, что если составить отдѣльно ускоренія сдвиганій въ координатныхъ плоскостяхъ параллельно осямъ координатъ, то ускореніе въ общемъ случаѣ сдвиганія не будетъ геометрическою суммою этихъ трехъ ускореній, а будетъ содержать еще нѣкоторые добавочные члены. Дѣйствительно, полагая послѣдовательно k_2 и k_3, k_3 и k_1, k_1 и k_2 равными нулю, получимъ для ускореній:

$$W_{\text{IV}x}' = 0, \qquad W_{\text{IV}y}' = \frac{dk_1}{dt} z + k_1^2 y, \qquad W_{\text{IV}z}' = \frac{dk_1}{dt} y + k_1^2 z,$$
$$W_{\text{IV}x}'' = \frac{dk_2}{dt} z + k_2^2 x, \qquad W_{\text{IV}y}'' = 0, \qquad W_{\text{IV}z}'' = \frac{dk_2}{dt} x + k_2^2 z,$$
$$W_{\text{IV}x}''' = \frac{dk_3}{dt} y + k_3^2 x, \quad W_{\text{IV}y}''' = \frac{dk_3}{dt} x + k_3^2 y, \quad W_{\text{IV}z}''' = 0.$$

---

[1]) У Durrande'а ускореніе w_{IV}'' въ общихъ формулахъ для ускореній вовсе не входитъ по причинѣ, указанной въ § 71.

Тогда формулы (298) представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$w_{IV x}'' = W_{IV x}' + W_{IV x}'' + W_{IV x}''' + k_1\, k_2\, y + k_3\, k_1\, z,$$

$$w_{IV y}'' = W_{IV y}' + W_{IV y}'' + W_{IV y}''' = k_2\, k_3\, z + k_1\, k_2\, x,$$

$$w_{IV z}'' = W_{IV z}' + W_{IV z}'' + W_{IV z}''' = k_3\, k_1\, x + k_3\, k_3\, y.$$

Добавочные члены въ этихъ формулахъ могутъ быть разсматриваемы какъ слагаемыя нѣкоторой скорости, происходящей отъ трехъ сдвиганій въ координатныхъ плоскостяхъ параллельно осямъ координатъ, если за скорости этихъ сдвиганій принять:

$$k_1' = k_2\, k_3, \quad k_2' = k_3\, k_1, \quad k_3' = k_1\, k_2.$$

74. Смѣшанныя ускоренія однородно-измѣняемой системы.

Смѣшанныя ускоренія слагаются, какъ показываютъ формулы (294), изъ ускореній трехъ видовъ, соотвѣтствующихъ соединенію попарно вращеній, удлиненій и сдвиганій.

1) Совокупность *удлиненій* и *вращеній* даетъ проекціи *смѣшаннаго ускоренія* въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} w_{Vx}'' &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\, q\, z - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, r\, y, \\ w_{Vy}'' &= (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\, r\, x - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\, p\, z, \qquad (299) \\ w_{Vz}'' &= (\varepsilon_3 + \varepsilon_2)\, p\, y - (\varepsilon_3 + \varepsilon_1)\, q\, x. \end{aligned}$$

Это ускореніе по составу аналогично проекціи вращательной скорости точки твердаго тѣла, если за слагаемыя угловой скорости принять

$$P = p\, (\varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

$$Q = q\, (\varepsilon_3 + \varepsilon_1),$$

$$R = r\, (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Изъ этой аналогіи видно, что это ускореніе перпендикулярно къ плоскости, образуемой векторомъ ρ и векторомъ Ω, проведеннымъ къ точкѣ (P, Q, R), и равно по величинѣ:

$$w_V'' = \rho\Omega \,.\, \sin\, (\Omega, \rho).$$

Это единственное смѣшанное ускореніе, которое у Durrande'a разсматривается; между тѣмъ существуетъ еще два подобныхъ-же ускоренія.

2) *Смѣшанное ускореніе*, зависящее отъ *вращеній* и *сдвиганій*, имѣетъ своими проекціями:

$$w_{\text{VI}x}'' = -(rk_1 + pk_3)\, z + (qk_1 + pk_2)\, y,$$
(300)
$$w_{\text{VI}y}'' = -(pk_2 + qk_1)\, x + (rk_2 + qk_3)\, z,$$
$$w_{\text{VI}z}'' = -(qk_3 + rk_2)\, y + (pk_3 + rk_1)\, x;$$

оно составлено сталобыть совершенно такъ-же, какъ предыдущее, т. е. какъ вращательная скорость; только соотвѣтствующія ей слагаемыя угловой скорости теперь будутъ:

$$P' = -(qk_3 + rk_2),$$
$$Q' = -(rk_1 + pk_3),$$
$$R' = -(pk_2 + qk_1).$$

Если Ω' есть векторъ, проведенный къ точкѣ (P', Q', R'), то величина этого ускоренія будетъ:

$$w_{\text{VI}}'' = \rho \,.\, \Omega' \sin(\rho, \Omega').$$

3) Наконецъ третье *смѣшанное ускореніе*, зависящее отъ *удлиненій* и *сдвиганій*, уже отличается по своему составу отъ предыдущихъ; его проекціи

$$w_{\text{VII}x}'' = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\, k_2 z + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, k_3 y,$$
(301)
$$w_{\text{VII}y}'' = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\, k_3 x + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\, k_1 z,$$
$$w_{\text{VII}z}'' = (\varepsilon_3 + \varepsilon_2)\, k_1 y + (\varepsilon_3 + \varepsilon_1)\, k_2 x$$

показываютъ, что оно аналогично скоростямъ, происходящимъ отъ сдвиганій, если за скорости такихъ сдвиганій принять

$$\varkappa_1 = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\, k_1,$$
$$\varkappa_2 = (\varepsilon_3 + \varepsilon_1)\, k_2,$$
$$\varkappa_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_1)\, k_3.$$

75. Нѣкоторыя замѣчанія относительно ускореній однородно-измѣняемой системы.

Резюмируя всѣ предыдущія разсужденія, мы можемъ видѣть, что члены, опредѣляющіе ускореніе въ однородно-измѣняемой системѣ, мо-

жно раздѣлить на двѣ группы: *a*) на члены, содержащіе ускоренія основныхъ параметровъ перемѣщенія (поступательной и угловой скорости, скоростей главныхъ удлиненій и сдвиганій) и *b*) на такіе члены, которые по своему составу аналогичны выраженіямъ для скоростей и имѣютъ своими коэффиціентами величины, составленныя изъ параметровъ, опредѣляющихъ скорости. Пользуясь послѣднимъ замѣчаніемъ, можно проекціи ускоренія однородно-измѣняемой системы представить еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$w_x'' = \frac{d\varepsilon_1}{dt}x + \left(\frac{dk_3}{dt} - \frac{dr}{dt}\right)y + \left(\frac{dk_2}{dt} + \frac{dq}{dt}\right)z$$

$$+ \varepsilon_1 v_x'' + (k_3 - r)\, v_y'' + (k_2 + q)\, v_z'',$$

$$w_y'' = \left(\frac{dk_3}{dt} + \frac{dr}{dt}\right)x + \frac{d\varepsilon_2}{dt}y + \left(\frac{dk_1}{dt} - \frac{dp}{dt}\right)z$$

$$+ (k_3 + r)\, v_x'' + \varepsilon_2 v_y'' + (k_1 - p)\, v_z'',$$

$$w_z'' = \left(\frac{dk_2}{dt} - \frac{dq}{dt}\right)x + \left(\frac{dk_1}{dt} + \frac{dp}{dt}\right)y + \frac{d\varepsilon_3}{dt}z$$

$$+ (k_2 - q)\, v_x'' + (k_1 + p)\, v_y'' + \varepsilon_3 v_z''.$$

Такимъ образомъ w'' можно разсматривать состоящимъ изъ двухъ частей: ускоренія, зависящаго отъ измѣненія параметровъ скоростей, и ускоренія, которое имѣла-бы система, если-бы эти параметры своей величины не измѣняли. Послѣдняго рода ускореніе измѣряется скоростью точки, находящейся на концѣ вектора, проведеннаго изъ начала координатъ, геометрически равнаго скорости данной точки и неизмѣнно связаннаго съ двигающейся системою.

Относительно ускореній w_{IV}'' и w_{VII}'' рѣшимъ еще слѣдующій вопросъ. Выраженія этихъ ускореній зависятъ отъ двухъ обстоятельствъ въ движеніи системы: 1) отъ того, что главныя оси чистой деформаціи не направлены по координатнымъ осямъ, и 2) отъ того, что эти оси въ два послѣдовательныхъ элемента времени не сохраняютъ своего направленія. Постараемся теперь въ формулахъ (298) и (301) отдѣлить одно отъ другаго эти два вліянія на выраженія ускореніе.

Легко видѣть прежде всего, что если первоначальныя направленія осей деформаціи совпадаютъ съ координатными, то ускореніе, зависящее

отъ ихъ отклоненія отъ этихъ направленій, опредѣлится величинами $\frac{dk_1}{dt}, \frac{dk_2}{dt}, \frac{dk_3}{dt}$. Дѣйствительно, если въ формулахъ (294) считать вращеніе отсутствующимъ и еще положить для даннаго момента

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0,$$

т. е. предположить, что въ данный моментъ главныя оси деформаціи совпадаютъ съ координатными, то для ускоренія мы получаемъ выраженія:

$$w_x'' = \left(\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1^2\right) x + \frac{dk_3}{dt} y + \frac{dk_2}{dt} z,$$

$$w_y'' = \left(\frac{d\varepsilon_2}{dt} + \varepsilon_2^2\right) y + \frac{dk_1}{dt} z + \frac{dk_3}{dt} x,$$

$$w_z'' = \left(\frac{d\varepsilon_3}{dt} + \varepsilon_3^2\right) z + \frac{dk_2}{dt} x + \frac{dk_1}{dt} y.$$

Если первоначальныя направленія осей деформаціи не совпадаютъ съ координатными, то для опредѣленія вліянія на ускореніе отклоненія осей деформаціи мы можемъ воспользоваться преобразованіемъ координатныхъ осей. Пусть будутъ теперь v и w скорость и ускореніе въ движеніи однородно-измѣняемой системы, сопровождаемомъ перемѣною осей деформаціи при произвольномъ положеніи координатныхъ осей, и v' и w' скорость и ускореніе той-же точки, когда оси координатъ совпадаютъ съ осями деформаціи, а $\overline{w}$ и $\overline{w}'$ соотвѣтствующія этому значенія ускореній въ предположеніи, что оси деформаціи своего направленія не мѣняютъ. Тогда можно написать слѣдующую систему уравненій:

$$v_x' = \varepsilon_1' x',$$
$$v_y' = \varepsilon_2' y',$$
$$v_z' = \varepsilon_3' z';$$

$$v_x = \alpha_1 v_x' + \beta_1 v_y' + \gamma_1 v_z' = \varepsilon_1 x + k_3 y + k_2 z$$
$$v_y = \alpha_2 v_x' + \beta_2 v_y' + \gamma_2 v_z' = k_3 x + \varepsilon_2 y + k_1 z,$$
$$v_z = \alpha_3 v_x' + \beta_3 v_y' + \gamma_3 v_z' = k_2 x + k_1 y + \varepsilon_3 z;$$

гдѣ

(302)
$$\varepsilon_1 = \alpha_1^2 \varepsilon_1' + \beta_1^2 \varepsilon_2' + \gamma_1^2 \varepsilon_3',$$
$$\varepsilon_2 = \alpha_2^2 \varepsilon_1' + \beta_2^2 \varepsilon_2' + \gamma_2^2 \varepsilon_3',$$
$$\varepsilon_3 = \alpha_3^2 \varepsilon_1' + \beta_3^2 \varepsilon_2' + \gamma_3^2 \varepsilon_3';$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_2\alpha_3\varepsilon_1' + \beta_2\beta_3\varepsilon_2' + \gamma_2\gamma_3\varepsilon_3', \\ k_2 &= \alpha_3\alpha_1\varepsilon_1' + \beta_3\beta_1\varepsilon_2' + \gamma_3\gamma_1\varepsilon_3\ , \\ k_3 &= \alpha_1\alpha_2\varepsilon_1' + \beta_1\beta_2\varepsilon_2' + \gamma_1\gamma_2\varepsilon_3'. \end{aligned} \tag{303}$$

Далѣе, для ускореній:

$$\overline{w}_x' = \left(\frac{d\varepsilon_1'}{dt} + \varepsilon_1'^2\right) x' + E_1'x',$$

$$\overline{w}_y' = \left(\frac{d\varepsilon_2'}{dt} + \varepsilon_2'^2\right) y' = E_2'y',$$

$$\overline{w}_z' = \left(\frac{d\varepsilon_3'}{dt} + \varepsilon_3'^2\right) z' = E_3'z';$$

$$\begin{aligned} \overline{w}_x &= E_1x + K_3y + K_2z, \\ \overline{w}_y &= K_3x + E_2y + K_1z, \\ \overline{w}_z &= K_2x + K_1y + E_3z, \end{aligned} \tag{304}$$

если положить

$$\begin{aligned} E_1 &= \alpha_1^2E_1' + \beta_1^2E_2' + \gamma_1^2E_3', \\ E_2 &= \alpha_2^2E_1' + \beta_2^2E_2' + \gamma_2^2E_3', \\ E_3 &= \alpha_3^2E_1' + \beta_3^2E_2' + \gamma_3^2E_3'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \alpha_2\alpha_3E_1' + \beta_2\beta_3E_2' + \gamma_2\gamma_2E_3', \\ K_2 &= \alpha_3\alpha_1E_1' + \beta_3\beta_1E_2' + \gamma_3\gamma_1E_3', \\ K_3 &= \alpha_1\alpha_2E_1' + \beta_1\beta_2E_2' + \gamma_1\gamma_2E_3'. \end{aligned}$$

Принимая во вниманіе формулы (302) и (303), мы можемъ легко убѣдиться, что

$$E_1 = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1^2 + k_2^2 + k_3^2,$$

$$E_2 = \frac{d\varepsilon_2}{dt} + \varepsilon_2^2 + k_3^2 + k_1^2,$$

$$E_3 = \frac{d\varepsilon_3}{dt} + \varepsilon_3^2 + k_1^2 + k_2^2;$$

$$K_1 = k_2k_3 + k_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$
$$K_2 = k_3k_1 + k_2(\varepsilon_3 + \varepsilon_1),$$
$$K_3 = k_1k_2 + k_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Обращаясь теперь къ общимъ формуламъ (294) и полагая въ нихъ только

$$p = 0,\ q = 0,\ r = 0,$$

находимъ, что

$$w_x'' = E_1x + K_3y + K_2z + \frac{dk_3}{dt}y + \frac{dk_2}{dt}z,$$

$$w_y'' = K_3x + E_2y + K_1z + \frac{dk_1}{dt}z + \frac{dk_3}{dt}x,$$

$$w_z'' = K_2x + K_1y + E_3z + \frac{dk_2}{dt}x + \frac{dk_1}{dt}y,$$

или, по формуламъ (304),

$$w_x = \bar{w}_x + \frac{dk_3}{dt}y + \frac{dk_2}{dt}z,$$

$$w_y = \bar{w}_y + \frac{dk_1}{dt}z + \frac{dk_3}{dt}x,$$

$$w_z = \bar{w}_z + \frac{dk_2}{dt}x + \frac{dk_1}{dt}y.$$

Такимъ образомъ ускореніе чистой деформаціи слагается изъ ускоренія w, которое имѣло-бы система, если-бы направленія главныхъ осей не мѣнялись, и изъ ускоренія $\dot{w}$, зависящаго только отъ измѣненія этихъ направленій и имѣющаго своими проекціями

(305)
$$\dot{w}_x = \frac{dk_3}{dt}y + \frac{dk_2}{dt}z,$$
$$\dot{w}_y = \frac{dk_1}{dt}z + \frac{dk_3}{dt}x,$$
$$\dot{w}_z = \frac{dk_2}{dt}x + \frac{dk_1}{dt}y.$$

Эти формулы отличаются отъ формулъ (298), дающихъ ускореніе въ

движеніи системы, состоящемъ изъ сдвиганій въ координатныхъ плоскостяхъ, потому-что въ такомъ движеніи удлиненія существуютъ, но только они направлены не по координатнымъ осямъ; въ формулахъ-же (305) удлиненія совсѣмъ исключены, а оставлено только измѣненіе направленія осей деформаціи.

76. Смѣшанное ускореніе коллинеарно-измѣняемой системы, содержащее параметры раздвиганія.

Намъ остается теперь разсмотрѣть ускореніе смѣшанное, зависящее какъ отъ раздвиганій, такъ и отъ движенія, свойственнаго однородно-измѣняемой системѣ.

Вліяніе, которое оказываетъ на это ускореніе измѣненіе положенія центра раздвиганій, мы разсмотримъ ниже въ отдѣльности и будемъ поэтому теперь предполагать, что поступательныя слагаемыя движенія отсутствуютъ, т. е.

$$S_1 = 0,\ S_2 = 0,\ S_3 = 0.$$

Кромѣ того введемъ въ формулы (282) скорости удлиненій, сдвиганій и вращеній. Тогда для смѣшаннаго ускоренія получимъ:

$$\begin{aligned} w_x''' = 2\,[\,\varepsilon_1 x + (k_3 - r)\,y + (k_2 + q)\,z\,]\,(Px + Qy + Rz) \\ + Px\,[\,\varepsilon_1 x + (k_3 - r)\,y + (k_2 + q)\,z\,] \\ + Qx\,[\,(k_3 + r)\,x + \varepsilon_2 y + (k_1 - p)\,z\,] \\ + Rx\,[\,(k_2 - q)\,x + (k_1 + p)\,y + \varepsilon_3\,z\,] \end{aligned}$$

и еще двѣ подобныя-же формулы для w_y''' и w_z'''. Эти ускоренія можно разложить на двѣ части. Означивъ черезъ v' скорость точки въ чистомъ раздвиганіи системы, а черезъ v'' ея скорость въ движеніи безъ раздвиганій, можно написать:

$$w_x''' = w_{1x}''' + w_{2x}''',$$
$$w_y''' = w_{1y}''' + w_{2y}''',$$
$$w_z''' = w_{1z}''' + w_{2z}''';$$

причемъ

$$\begin{aligned} w_{1x}''' &= 2v_x''\,\frac{v_x'}{x} = 2\,\frac{v'}{\rho}\,v_x'', \\ w_{1y}''' &= 2v_y''\,\frac{v_y'}{y} = 2\,\frac{v'}{\rho}\,v_y'', \\ w_{1z}''' &= 2v_z''\,\frac{v_z'}{z} = 2\,\frac{v'}{\rho}\,v_z'', \end{aligned} \qquad (306)$$

$$w_{2x}''' = x\,(Pv_x'' + Qv_y'' + Rv_z''),$$

(307) $$w_{2y}''' = y\,(Pv_x'' + Qv_y'' + Rv_z''),$$

$$w_{2z}''' = z\,(Pv_x'' + Qv_y'' + Rv_z'').$$

Формулы (306) даютъ:

$$w_1''' = 2\,\frac{v'}{\rho}\,v''.$$

Это ускореніе, какъ показываетъ формула (285), ***относится къ ускоренію равномѣрнаго раздвиганія, какъ скорость въ движеніи безъ раздвиганій относится къ скорости въ чистомъ раздвиганіи.*** Направленіе этого ускоренія совпадаетъ съ направленіемъ скорости въ движеніи безъ раздвиганія.

Формулы (307) показываютъ, что ускореніе w_2''' можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$w_2''' = \rho\,(Pv_x'' + Qv_y'' + Rv_z'') = \rho\,\frac{V''}{v''},$$

гдѣ V'' можно уподобить скорости, которую имѣла-бы въ чистомъ раздвиганіи точка, находящаяся на концѣ вектора, проведеннаго изъ центра деформаціи и геометрически равнаго скорости въ движеніи безъ раздвиганія.

Въ заключеніе разбора ускореній, изъ которыхъ полное ускореніе коллинеарно-измѣняемой системы слагается, замѣтимъ, что всѣ выраженія для смѣшанныхъ ускореній могли-бы быть получены изъ общихъ формулъ для ускоренія въ составномъ движеніи измѣняемой системы, предложенныхъ Бобылевымъ [1]. Мы этого не сдѣлали, потому-что исходили непосредственно изъ общихъ формулъ для ускоренія коллинеарно-измѣняемой системы.

77. Вліяніе перемѣны положенія центра раздвиганія на ускореніе въ чистомъ раздвиганіи.

Пусть будутъ x_0, y_0, z_0 координаты центра раздвиганій, скорости

[1]) Ueber die relative Bewegung eines Punktes in einem in continuirlicher Deformation begriffenen Medium. Zeitschrift für Math. und Phys. B. XXX.

въ движеніи системы, состоящемъ только изъ раздвиганія, будутъ опредѣляться формулами:

$$
\begin{aligned}
v_x' &= (x - x_0)\,[\,P\,(x - x_0) + Q\,(y - y_0) + R\,(z - z_0)\,],\\
v_y' &= (y - y_0)\,[\,P\,(x - x_0) + Q\,(y - y_0) + R\,(z - z_0)\,],\qquad (308)\\
v_z' &= (z - z_0)\,[\,P\,(x - x_0) + Q\,(y - y_0) + R\,(z - z_0)\,].
\end{aligned}
$$

Если центръ раздвиганій не мѣняетъ своего положенія, то, считая x_0, y_0, z_0 постоянными, найдемъ:

$$
\begin{aligned}
w_x' = (x - x_0)\,[\,P'\,(x - x_0) + Q'\,(y - y_0) + R'\,(z - z_0)\,]\\
+ (x - x_0)\;(Pv_x' + Qv_y' + Rv_z')\\
+ v_x\,[\,P\,(x - x_0) + Q\,(y - y_0) + R\,(z - z_0)\,]
\end{aligned}
$$

и подобныя-же выраженія для w_y' и w_z'. Если положеніе центра раздвиганій мѣняется, то ускореніе будетъ имѣть своими проекціями выраженія, которыя получимъ дифференцированіемъ по t изъ формулъ (308), считая въ нихъ x_0, y_0, z_0 функціями времени. Это дастъ

$$
\begin{aligned}
w_x = w_x' - (x - x_0)\,[P\frac{dx_0}{dt} + Q\frac{dy_0}{dt} + R\frac{dz_0}{dt}]\\
- \frac{dx_0}{dt}\,[\,P\,(x - x_0) + Q\,(y - y_0) + R\,(z - z_0)\,],\\
w_y = w_y' - (y - y_0)\,[P\frac{dx_0}{dt} + Q\frac{dy_0}{dt} + R\frac{dz_0}{dt}]\\
- \frac{dy_0}{dt}\,[P\,(x - x_0) + Q\,(y - y_0) + R\,(z - z_0)],\\
w_z = w_z' - (z - z_0)\,[P\frac{dx_0}{dt} + Q\frac{dy_0}{dt} + R\frac{dz_0}{dt}]\\
- \frac{dz_0}{dt}\,[\,P\,(x - x_0) + Q\,(y - y_0) + R\,(z - z_0)\,].
\end{aligned}
$$

Перенеся начало координатъ въ положеніе центра раздвиганій, соотвѣтствующее данному моменту, получимъ:

$$
\begin{aligned}
w_x &= w_x' - v_{0x}\,(Px + Qy + Rz) - x\,(Pv_{0x} + Qv_{0y} + Rv_{0z}),\\
w_y &= w_y' - v_{0y}\,(Px + Qy + Rz) - y\,(Pv_{0x} + Qv_{0y} + Rv_{0z}),\\
w_z &= w_z' - v_{0z}\,(Px + Qy + Rz) - z\,(Pv_{0x} + Qv_{0y} + Rv_{0z}).
\end{aligned}
$$

Такимъ образомъ ускореніе въ движеніи, состоящемъ изъ раздвиганій около перемѣннаго центра, не есть уже ускореніе чистаго раздвиганія и содержитъ члены, соотвѣтствующіе ускоренію однородно-измѣняемой системы. Это добавочное ускореніе можно разсматривать состоящимъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ одна измѣряется величиною

(309) $$\frac{v_0 v'}{\rho},$$

а другая

(310) $$\rho\,(Pv_{0x} + Qv_{0y} + Qv_{0z}),$$

пропорціональная для даннаго момента разстоянію точки отъ центра раздвиганій, представляетъ собою ускореніе нѣкотораго расширенія, одинаковаго по всѣмъ направленіямъ. Первая слагаемая (309) имѣетъ направленіе касательной къ линіи центровъ раздвиганій, а другая (310) направлена по вектору, проведенному изъ центра раздвиганій къ данной точкѣ.

Не останавливаясь на вопросахъ о распредѣленіи ускореній, къ которымъ можно было-бы примѣнить тѣ-же пріемы, какіе были приложены къ изслѣдованію распредѣленія скоростей, но которые не содѣйствуютъ въ такой-же степени наглядному представленію кинематическихъ свойствъ коллинеарно-измѣняемой системы, — обратимся въ послѣдней главѣ къ нѣсколькимъ дополнительнымъ вопросамъ, болѣе существеннымъ для характеристики коллинеарно-измѣняемой системы[1]).



---

[1]) Изслѣдованіе ускореній однородно-измѣняемой и въ частности подобно-измѣняемой системы, кромѣ цитированной выше статьи Durrande'a, можно найти еще въ слѣдующихъ работахъ: Burmester (Civilingenieur, 1878), Mehmke (Civilingenieur, 1883). Geisenheimer (Schlömilchs Zeitschrift f. Math. und. Phys. B. XXIV). П. Сомовъ (Кинематика подобно-изм. сист. двухъ измѣреній).

ГЛАВА V.

A. О линіяхъ огибаемыхъ въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы.

---

78. Пересѣкающія траекторіи точекъ поверхности, принадлежащей какой-либо измѣняемой системѣ.

Пусть будетъ

$$F(a_1, a_2, a_3) = 0 \tag{311}$$

уравненіе поверхности, принадлежащей измѣняемой системѣ въ ея начальномъ положеніи. При этомъ координатная система предполагается какою нибудь вообще говоря криволинейною. Траекторіи двухъ безконечно близкихъ точекъ $M(a_1, a_2, a_3)$ и $M'(a_1+\Delta a_1, a_2+\Delta a_2, a_3+\Delta a_3)$ этой поверхности вообще говоря не пересѣкаются; но всегда можно выбрать положеніе точки M' такъ, чтобы это пересѣченіе имѣло мѣсто. Пусть координаты точки M въ нѣкоторый моментъ t опредѣляются формулами

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(a_1, a_2, a_3, t), \\ q_2 &= f_2(a_1, a_2, a_3, t), \\ q_3 &= f_3(a_1, a_2, a_3, t). \end{aligned} \tag{312}$$

Для того, чтобы эта точка была точкою пересѣченія своей траекторіи съ траекторіею точки M', необходимо, чтобы координаты (312) были соотвѣтственно равны координатамъ точки M', но соотвѣтствующимъ уже другому моменту $t+\Delta t$. Дѣйствительно, для одного и того-же момента t точки M и M' будутъ безконечно близки и поэтому точкою пересѣченія будетъ служить такая точка траекторіи (M), положеніе которой без-

конечно-близко къ положенію точки M' въ нѣкоторый моментъ $t+\Delta t$. Итакъ мы имѣемъ условія:

$$f_1(a_1+\Delta a_1,\ a_2+\Delta a_2,\ a_3+\Delta a_3,\ t+\Delta t)=f_1(a_1,\ a_2,\ a_3,\ t),$$
$$f_2(a_1+\Delta a_1,\ a_2+\Delta a_2,\ a_3+\Delta a_3,\ t+\Delta t)=f_2(a_1,\ a_2,\ a_3,\ t),$$
$$f_3(a_1+\Delta a_1,\ a_2+\Delta a_2,\ a_3+\Delta a_3,\ t+\Delta t)=f_3(a_1,\ a_2,\ a_3,\ t),$$

которыя даютъ:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial f_1}{\partial a_2}da_2+\frac{\partial f_1}{\partial a_3}da_3+\frac{\partial f_1}{\partial t}dt=0,\\
(313)\qquad&\frac{\partial f_2}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial f_2}{\partial a_2}da_2+\frac{\partial f_2}{\partial a_3}da_3+\frac{\partial f_2}{\partial t}dt=0,\\
&\frac{\partial f_3}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial f_3}{\partial a_2}da_2+\frac{\partial f_3}{\partial a_3}da_3+\frac{\partial f_3}{\partial t}dt=0.
\end{aligned}$$

Къ этому нужно еще прибавить условіе, что точка M' находится на поверхности (311), т. е. что начальныя координаты ея удовлетворяютъ уравненію

$$F(a_1+\Delta a_1,\ a_2+\Delta a_2,\ a_3+\Delta a_3)=0,$$

которое даетъ:

$$(314)\qquad \frac{\partial F}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial F}{\partial a_2}da_2+\frac{\partial F}{\partial a_3}da_3=0.$$

Если исключить изъ четырехъ уравненій (313) и (314) da_1, da_2, da_3, то получится условіе, которому должны удовлетворять координаты всѣхъ точекъ на поверхности (311), траекторіи которыхъ пересѣкаются съ траекторіями смежныхъ съ ними точекъ. Результатомъ исключенія будетъ уравненіе:

$$(315)\qquad \begin{vmatrix}
\frac{\partial F}{\partial a_1}, & \frac{\partial F}{\partial a_2}, & \frac{\partial F}{\partial a_3}, & 0\\
\frac{\partial f_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_1}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_1}{\partial t}\\
\frac{\partial f_2}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_2}{\partial t}\\
\frac{\partial f_3}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_3}{\partial t}
\end{vmatrix}=0.$$

Совокупность этого уравненія и уравненія (311) опредѣляетъ линіи на поверхности (311), траекторіи точекъ которыхъ пересѣкаются съ траекторіями смежныхъ съ ними точекъ той-же поверхности. Присутствіе перемѣнной t въ уравненіи (315) объясняется слѣдующимъ образомъ. Мы отыскивали точки поверхности, траекторіи которыхъ съ траекторіями смежныхъ точекъ пересѣкаются въ моментъ t; точки, траекторіи которыхъ пересѣкаются съ траекторіями смежныхъ точекъ въ другой какой-нибудь моментъ t', будутъ на данной поверхности образовать другую кривую линію, и такимъ образомъ каждому моменту будетъ соотвѣтствовать особая линія на данной поверхности.

Чтобы найти геометрическое мѣсто самихъ точекъ пересѣченія, соотвѣтствующее моменту t, мы должны исключить a_1, a_2, a_3 изъ уравненій (311), (312) и (315). Результатомъ исключенія будутъ два уравненія, связывающія перемѣнныя q_1, q_2, q_3 и t. Всѣ такія геометрическія мѣста, соотвѣтствующія различнымъ моментамъ, образуютъ поверхность, уравненіе которой мы получимъ, исключивъ t изъ двухъ послѣднихъ уравненій, т. е., другими словами, исключивъ четыре перемѣнныхъ a_1, a_2, a_3 и t изъ пяти уравненій (311), (312) и (315). Эта поверхность можетъ быть разсматриваема какъ общее геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія траекторій, описываемыхъ точками, которыя лежатъ на данной поверхности, принадлежащей измѣняемой системѣ.

79. Огибаемыя поверхности и теорема Burmester'а, обобщенная на измѣняемую систему трехъ измѣреній.

Указанное выше геометрическое мѣсто, какъ можно легко видѣть, совпадаетъ съ поверхностью, огибаемою различными положеніями поверхности (311) при движеніи системы. На подобное совпаденіе было указано Burmester'омъ въ примѣненіи къ плоской измѣняемой системѣ[1]). Тамъ траекторіи двухъ смежныхъ точекъ кривой линіи, принадлежащей измѣняемой системѣ, всегда пересѣкаются и поэтому не требуется никакой оговорки относительно образованія огибаемой линіи. Въ приложеніи къ измѣняемой системѣ трехъ измѣреній намъ кажется необходимымъ болѣе точное выясненіе того, какъ огибаемая поверхность образуется. Чтобы доказать теперь совпаденіе обѣихъ огибаемыхъ по-

---

[1]) Schlömilchs Zeitschrift für Math. u. Phys. B. XIX.

верхностей, замѣтимъ себѣ слѣдующее. Поверхность, начальное положеніе которой опредѣляется уравненіемъ (311), будетъ въ моментъ t имѣть своимъ уравненіемъ результатъ исключенія перемѣнныхъ a_1, a_2, a_3 изъ уравненій (311) и (312); пусть этотъ результатъ исключенія будетъ

$$\Phi(q_1, q_2, q_3, t) = 0. \tag{316}$$

Съ другой стороны, тѣ точки этой поверхности, которыя лежатъ вмѣстѣ съ тѣмъ и на поверхности огибаемой, очевидно обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что перемѣщенія ихъ, зависящія отъ движенія системы, происходятъ въ плоскостяхъ, касательныхъ къ поверхности (316); т. е. эти точки должны удовлетворять условію:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial t} = 0. \tag{317}$$

Уравненіе огибаемой поверхности будетъ результатомъ исключенія t изъ этого уравненія и изъ уравненія (316) или, что то-же самое, результатомъ исключенія перемѣнныхъ a_1, a_2, a_3, t изъ уравненій (312), (316) и (317). Но легко показать, что полученное такимъ образомъ условіе тождественно съ условіемъ (315): если въ функціи (316) вмѣсто q_1, q_2, q_3 подставить ихъ значенія изъ (315), то эта функція обратится очевидно въ функцію $F(a_1, a_2, a_3)$; поэтому

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\frac{\partial f_3}{\partial a_1} = \frac{\partial F}{\partial a_1},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\frac{\partial f_3}{\partial a_2} = \frac{\partial F}{\partial a_2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\frac{\partial f_1}{\partial a_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\frac{\partial f_2}{\partial a_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\frac{\partial f_3}{\partial a_3} = \frac{\partial F}{\partial a_3};$$

отсюда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial F}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial F}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial F}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial F}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_3}, & \frac{\partial F}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_3} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_1}, & \frac{\partial F}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}, & \frac{\partial F}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_3}, & \frac{\partial F}{\partial a_3} \end{vmatrix},$$

гдѣ

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_3}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \end{vmatrix}.$$

Подставляя эти выраженія въ условіе (317), мы найдемъ, что оно обратится въ уравненіе (315). Такимъ образомъ уравненіе поверхности, огибаемой движеніемъ поверхности, составленной изъ точекъ системы, можетъ быть получено исключеніемъ перемѣнныхъ a_1, a_2, a_3, t изъ тѣхъ же уравненій, изъ которыхъ эти перемѣнныя должны быть исключены для полученія уравненія поверхности, огибаемой траекторіями.

Въ справедливости сказаннаго можно также убѣдиться, разсматривая вопросъ геометрически. Представимъ себѣ пространство V, которое слагается изъ всѣхъ положеній данной поверхности, принадлежащей измѣняемой системѣ. Для большей наглядности будемъ считать данную поверхность замкнутою. Очевидно, что траекторіи всѣхъ точекъ этой поверхности будутъ заключены въ пространствѣ V, причемъ или всѣ или нѣкоторая часть ихъ будутъ касаться поверхности, ограничивающей пространство V. Очевидно также, что точки касанія послѣднихъ

траекторій будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ представлять въ предѣлѣ точки пересѣченія этихъ траекторій съ траекторіями смежныхъ точекъ данной поверхности; поэтому поверхность, образуемая этими точками касанія, будетъ та самая поверхность, которую мы опредѣляли въ началѣ этого §.

Изъ этого разсмотрѣнія видно вмѣстѣ съ тѣмъ, что не всѣ точки данной поверхности будутъ непремѣнно участвовать въ образованіи вышеуказанной поверхности.

Для плоской измѣняемой системы эта теорема тоже можетъ быть весьма просто пояснена геометрически такимъ-же образомъ, какъ это сдѣлано для системы трехъ измѣреній[1]). Представимъ себѣ поверхность (для бо̀льшей ясности опять замкнутую) и проекцію ея на нѣкоторую плоскость и замѣтимъ себѣ контуръ этой проекціи. На поверхности проведемъ двѣ системы кривыхъ линій, образующихъ на ней сѣть; проекціи одной системы этихъ кривыхъ на плоскости проекцій примемъ за различныя положенія кривой σ, принадлежащей плоской измѣняемой системѣ, а проекціи другой системы вышеуказанныхъ кривыхъ за траекторіи различныхъ точекъ кривой σ. Тогда съ перваго взгляда видно, что контуръ проекціи поверхности будетъ служить одновременно огибаемою какъ для различныхъ положеній кривой σ, такъ и для траекторій точекъ этой кривой.

80. Огибаемыя поверхности въ обращенномъ движеніи.

Теорема Burmester'а можетъ служить для того, чтобы вопросы объ огибаемыхъ, рѣшенные для измѣняемой системы одного рода, переносить на измѣняемыя системы другаго рода. Принципъ, на которомъ это основано, тотъ самый, который мы согласно съ Burmester'омъ называли (§ 10) обращеніемъ движенія (Princip der Umkehrung). Разсмотримъ сначала плоскую измѣняемую систему. Пусть будутъ $\sigma, \sigma', \sigma''\dots$ различныя положенія кривой линіи(σ), принадлежащей плоской измѣняемой системѣ A, и $s, s', s''\dots$ траекторіи различныхъ точекъ системы, лежащихъ на кривой (σ). Можно себѣ представить другую плоскую систему B, въ которой точки, расположенныя въ нѣкоторый моментъ на линіи (s), имѣютъ своими траекторіями линіи $\sigma, \sigma', \sigma''$. На основаніи теоремы Burmester'а кривая, огибаемая въ движеніи си-

---

[1]) На такого рода объясненіе было обращено мое вниманіе проф. Бобылевымъ.

стемы A различными положеніями линіи (σ), будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ огибаемою, образуемою въ движеніи системы B различными положеніями линіи (s). Точно такъ-же кривая, огибаемая въ движеніи системы A траекторіями (s) различныхъ точекъ, расположенныхъ на линіи (σ), будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ огибаемою, образуемою въ движеніи системы B траекторіями (σ), которыя описываютъ точки, расположенныя на линіи (s), принадлежащей этой системѣ. Это замѣчаніе и даетъ возможность, когда извѣстна въ движеніи одной плоской системы кривая, огибаемая линіею, принадлежащею этой системѣ, опредѣлить линію, огибаемую въ движеніи нѣкоторой другой плоской системы нѣкоторою линіею, принадлежащею этой послѣдней системѣ.

Къ измѣняемой системѣ трехъ измѣреній этотъ принципъ обращенія не можетъ быть приложенъ безъ дальнѣйшихъ оговорокъ, потому-что для такой системы элементами, образующими одну и ту-же огибаемую поверхность, являются съ одной стороны поверхности, а съ другой—линіи. Но мы можемъ разсматривать вопросъ въ слѣдующемъ видѣ. Въ § 78 мы разсматривали лежащую на поверхности (311) линію (λ), траекторіи точекъ которой пересѣкаются съ траекторіями смежныхъ съ ними точекъ поверхности въ моментъ t. Эта линія (λ) при движеніи поверхности (311) описываетъ нѣкоторую поверхность S; подобная-же линія (λ'), соотвѣтствующая моменту t', безконечно-близкому къ t, описываетъ другую поверхность S', которая пересѣкается съ поверхностью S по нѣкоторой линіи, въ предѣлѣ принадлежащей очевидно огибаемой поверхности. Слѣдующему моменту t'' будетъ соотвѣтствовать поверхность S'', пересѣкающаяся съ поверхностью S' по линіи, принадлежащей въ предѣлѣ той-же огибаемой поверхности, и т. д. Всѣ эти поверхности $S, S', S''\ldots$ играютъ теперь такую-же роль, какъ траекторіи s, s', s'' въ движеніи плоской измѣняемой системы. Итакъ представимъ себѣ теперь двѣ измѣняемыхъ системы трехъ измѣреній. Въ первой системѣ возьмемъ поверхность Σ и на ней линіи (λ), опредѣляемыя такъ, какъ это выше указано; поверхности S, образуемыя движеніемъ этихъ линій, будутъ на основаніи доказанной выше теоремы огибать ту-же самую поверхность, какую огибаютъ различныя положенія поверхности Σ. Во второй измѣняемой системѣ проведемъ поверхность S; мы можемъ себѣ представить, что законъ измѣняемости второй системы таковъ, что эта поверхность при движеніи этой системы совпа-

даетъ послѣдовательно съ поверхностями S, S', S'', разсмотрѣнными въ первой системѣ, и что нѣкоторыя линіи μ, μ', μ'', начерченныя на поверхности S, при движеніи второй системы описываютъ поверхности, совпадающія съ различными положеніями поверхности Σ въ движеніи первой системы. Тогда мы увидимъ, что поверхность, огибаемая траекторіями точекъ, расположенныхъ на поверхности Σ при движеніи первой системы, совпадаетъ съ поверхностью, огибаемою траекторіями, которыя описываютъ при движеніи второй системы точки, расположенныя на поверхности S. Такимъ образомъ можно сказать на основаніи обобщенной теоремы Burmester'а: поверхность, огибаемая при движеніи первой системы различными положеніями поверхности Σ, совпадаетъ съ поверхностью, огибаемою при движеніи второй системы поверхностью S, принадлежащею этой системѣ.

81. О самоогибаемыхъ линіяхъ.

Между кривыми линіями или поверхностями, которыя огибаются линіями или поверхностями, принадлежащими измѣняемой системѣ, особеннаго вниманія заслуживаютъ такія, которыя совпадаютъ съ огибающими. Въ этомъ случаѣ эти линіи или поверхности могутъ быть названы *самоогибаемыми;* въ гидрокинематикѣ имъ дается обыкновенно названіе *линій* или *поверхностей тока* [1]).

Очевидно, что *самоогибаемыя линіи имѣютъ ту особенность, что при обращеніи однообразнаго движенія системы* (см. § 10) *остаются самоогибаемыми.*

Чтобы разсмотрѣть самоогибаемыя въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы, составимъ сначала общія уравненія для опредѣленія этихъ кривыхъ. Выберемъ какую-нибудь точку M системы въ моментъ t и замѣтимъ ея безконечно-малое перемѣщеніе σ въ теченіе слѣдующаго за нимъ элемента времени Δt. Ея новое положеніе совпадаетъ съ положеніемъ, которое имѣла нѣкоторая другая точка системы M' въ моментъ t. Эта точка въ свою очередь въ тотъ-же элементъ времени имѣла перемѣщеніе σ' и заняла нѣкоторое положеніе M'', совпадающее съ тѣмъ, которое третья точка системы M'' имѣла въ моментъ t. Опредѣляя такимъ образомъ далѣе послѣдовательный рядъ точекъ, мы полу-

---

[1]) Терминъ „самоогибаемыя" (Selbsthüllcurven) данъ повидимому Burmester'омъ.

чимъ линію, составленную изъ элементовъ σ, σ', σ'', которая имѣетъ свойство, что она въ теченіе элемента времени Δt перемѣщается вдоль самой себя; она въ этотъ элементъ времени представляетъ собою и огибающую, и огибаемую.

Очевидно, каждой точкѣ системы будетъ соотвѣтствовать въ данный моментъ опредѣленная самоогибаемая линія; если такія кривыя построить для точекъ, расположенныхъ на опредѣленной линіи, выбранной въ системѣ, то онѣ будутъ образовать собою поверхность, тоже самоогибаемую.

Вообще говоря самоогибаемыя линіи или поверхности съ теченіемъ времени измѣняютъ свое положеніе въ пространствѣ и въ различные моменты составляются изъ различныхъ точекъ системы; но можетъ случиться, что онѣ во все время движенія остаются безъ измѣненія. Если это имѣетъ мѣсто для всѣхъ точекъ системы, то движеніе ея можно назвать *установившимся;* уравненія самоогибаемыхъ линій или поверхностей не должны въ этомъ случаѣ содержать времени[1]).

Чтобы найти общій видъ самоогибаемыхъ линій въ начальныхъ координатахъ, обратимся къ уравненіямъ (312). Положеніе нѣкоторой выбранной нами точки (q_1, q_2, q_3), начальныя координаты которой были (a_1, a_2, a_3), въ моментъ $t+\Delta t$ будетъ опредѣляться координатами:

$$f_1(a_1, a_2, a_3, t+\Delta t), \quad f_2(a_1, a_2, a_3, t+\Delta t), \quad f_3(a_1, a_2, a_3, t+\Delta t).$$

Пусть будутъ $a_1+\Delta a_1$, $a_2+\Delta a_2$, $a_3+\Delta a_3$ начальныя координаты той точки системы, которая находилась въ этомъ положеніи въ моментъ t; эти координаты опредѣляются изъ условій:

$$f_1(a_1+\Delta a_1, a_2+\Delta a_2, a_3+\Delta a_3, t) = f_1(a_1, a_2, a_3, t+\Delta t),$$
$$f_2(a_1+\Delta a_1, a_2+\Delta a_2, a_3+\Delta a_3, t) = f_2(a_1, a_2, a_3, t+\Delta t),$$
$$f_3(a_1+\Delta a_1, a_2+\Delta a_2, a_3+\Delta a_3, t) = f_3(a_1, a_2, a_3, t+\Delta t).$$

---

[1]) Такое установившееся движеніе болѣе общаго характера, чѣмъ то, которое обыкновенно разсматривается въ гидродинамикѣ; тамъ оно опредѣляется условіемъ, чтобы скорость въ каждой точкѣ абсолютнаго пространства сохраняла свою величину и направленіе. Между тѣмъ самоогибаемыя линіи могутъ и тогда сохранять свое положеніе и составляться изъ однѣхъ и тѣхъ-же точекъ системы, когда скорость въ каждой точкѣ пространства мѣняется.

Отсюда, сохраняя безконечно-малыя величины перваго порядка, получимъ:

$$(318)\quad \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}da_1 + \frac{\partial f_1}{\partial a_2}da_2 + \frac{\partial f_1}{\partial a_3}da_3 &= \frac{\partial f_1}{\partial t}dt, \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1}da_1 + \frac{\partial f_2}{\partial a_2}da_2 + \frac{\partial f_2}{\partial a_3}da_3 &= \frac{\partial f_2}{\partial t}dt, \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1}da_1 + \frac{\partial f_3}{\partial a_2}da_2 + \frac{\partial f_3}{\partial a_3}da_3 &= \frac{\partial f_3}{\partial t}dt. \end{aligned}$$

Эти уравненія опредѣляютъ приращенія координатъ первой точки, которыя нужно имъ дать, чтобы получить другую точку самоогибаемой. Отсюда слѣдуетъ, что мы получимъ совокупность всѣхъ точекъ самоогибаемой линіи, если проинтегрируемъ между перемѣнными a_1, a_2, a_3 уравненія, которыя получимъ, исключивъ dt изъ уравненій (318) и считая въ нихъ t постояннымъ; эти уравненія будутъ слѣдующаго вида:

$$(319)\quad \frac{da_1}{Q_1} = \frac{da_2}{Q_2} = \frac{da_3}{Q_3},$$

если положить:

$$Q_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}, & \frac{\partial f_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial t}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \end{vmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial t}, & \frac{\partial f_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial t}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_3}{\partial t}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} \end{vmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1}, & \frac{\partial f_3}{\partial a_2}, & \frac{\partial f_3}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Пусть будутъ

$$\begin{aligned} \Phi_1(a_1, a_2, a_3, t) &= C_1, \\ \Phi_2(a_1, a_2, a_3, t) &= C_2 \end{aligned} \tag{320}$$

интегралы уравненій (319). Произвольныя постоянныя въ нихъ C_1 и C_2 опредѣлятся, когда будетъ дана одна точка, черезъ которую самоогибаемая линія должна проходить. Для этихъ произвольныхъ постоянныхъ получаются при этомъ одни и тѣ-же значенія для цѣлаго безконечнаго ряда точекъ, потому-что этихъ постоянныхъ *двѣ*, а задаваемыхъ координатъ *три*; но легко видѣть, что только тогда постоянныя C_1 и C_2 получаютъ однѣ и тѣ-же значенія, когда мы беремъ для ихъ опредѣленія точки, лежащія на одной и той-же самоогибаемой. Пусть будутъ a_{10}, a_{20}, a_{30} координаты точки, черезъ которую самоогибаемая должна проходить, и слѣдовательно

$$\begin{aligned} \Phi_1(a_{10}, a_{20}, a_{30}, t) &= C_1, \\ \Phi_2(a_{10}, a_{20}, a_{30}, t) &= C_2 \end{aligned} \tag{321}$$

уравненія для опредѣленія C_1 и C_2. Исключая C_1 и C_2 изъ уравненій (320) и (321), мы получимъ уравненія самоогибаемой линіи, проходящей черезъ данную точку.

Чтобы получить самоогибаемую поверхность, нужно задать въ системѣ линію, черезъ которую эта поверхность должна проходить; пусть будутъ

$$\begin{aligned} \varphi_1(a_{10}, a_{20}, a_{30}) &= 0, \\ \varphi_2(a_{10}, a_{20}, a_{30}) &= 0 \end{aligned} \tag{322}$$

уравненія этой линіи. Для самоогибаемыхъ линій, проходящихъ черезъ эту кривую, между C_1 и C_2 должна существовать опредѣленная зависимость, измѣняющаяся притомъ съ теченіемъ времени; мы ее найдемъ,

если изъ четырехъ уравненій (321) и (322) исключимъ a_{10}, a_{20}, a_{30}. Исключая же изъ 6 уравненій (320), (321) и (322) пять величинъ a_{10}, a_{20}, a_{30}, C_1, C_2, мы получимъ уравненіе самоогибаемой поверхности.

Если движеніе установившееся, то функціи (320) не должны содержать t. Функціи Q_1, Q_2, Q_3 при этомъ могутъ содержать t, но такимъ образомъ, чтобы t не входило въ уравненія (319), т. е. чтобы отношенія между функціями Q_1, Q_2, Q_3 не зависѣли отъ времени. Легко видѣть, что это условіе не только достаточное, но и необходимое. Въ этомъ можно убѣдиться, замѣтивъ, что предположеніе противнаго привело-бы къ дифференціальнымъ уравненіямъ, вообще говоря, противорѣчащимъ системѣ (319). Рѣшенія уравненій (319) удовлетворяютъ, какъ извѣстно, уравненіямъ съ частными производными:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_1} Q_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_2} Q_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_3} Q_3 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial a_1} Q_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_2} Q_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_3} Q_3 = 0.$$

Предположимъ, что Q_1, Q_2, Q_3 содержатъ t, а Φ_1 и Φ_2 этой перемѣнной не содержатъ; тогда эти двѣ послѣднихъ функціи должны также удовлетворять уравненіямъ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_1} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_2} \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_3} \frac{\partial Q_3}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial a_1} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_2} \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_3} \frac{\partial Q_3}{\partial t} = 0$$

и должны быть слѣдовательно рѣшеніями совокупныхъ уравненій такихъ:

$$\frac{da_1}{\frac{\partial Q_1}{\partial t}} = \frac{da_2}{\frac{\partial Q_2}{\partial t}} = \frac{da_3}{\frac{\partial Q_3}{\partial t}},$$

причемъ можно было-бы вмѣсто первыхъ производныхъ отъ Q_1, Q_2 и Q_3 поставить производныя какого-либо другаго порядка. Очевидно, что такія уравненія будутъ вообще говоря противорѣчить уравненіямъ

(319), если $\frac{\partial Q_1}{\partial t}$, $\frac{\partial Q_2}{\partial t}$, $\frac{\partial Q_3}{\partial t}$ не пропорціональны самимъ функціямъ Q_1, Q_2, Q_3. Итакъ эти функціи должны удовлетворять условіямъ:

$$\frac{1}{Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{1}{Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial t} = \frac{1}{Q_3}\frac{\partial Q_3}{\partial t}.$$

Отсюда получаемъ:

$$Q_2 = Q_1 . f_2(a_1, a_2, a_3),$$
$$Q_3 = Q_1 . f_3(a_1, a_2, a_3),$$

гдѣ f_2 и f_3 двѣ произвольныя функціи отъ координатъ. Итакъ мы можемъ сказать: *для того, чтобы движеніе системы было установившееся* (въ томъ смыслѣ, какъ это было выше указано), *необходимо и достаточно, чтобы отношенія между функціями Q_1, Q_2, Q_3 не зависѣли отъ времени.*

82. Самоогибаемыя линіи въ коллинеарно-измѣняемой системѣ. Посмотримъ теперь, какой видъ примутъ уравненія (319) для коллинеарно-измѣняемой системы. Полагая для сокращенія

$$A_1 a + B_1 b + C_1 c + D_1 = \xi,$$
$$A_2 a + B_2 b + C_2 c + D_2 = \eta,$$
$$A_3 a + B_3 b + C_3 c + D_3 = \zeta,$$
$$\alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = \delta,$$

и принимая во вниманіе формулы (4), (6), (7), (8), (9), (10) и (11), получимъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}\left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\frac{\partial f_3}{\partial c} - \frac{\partial f_2}{\partial c}\frac{\partial f_3}{\partial b}\right) = \frac{\Delta}{\delta^5}\left(\delta\frac{\partial \xi}{\partial t} - \xi\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)\left(E_1 - \lambda\right),$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial t}\left(\frac{\partial f_3}{\partial b}\frac{\partial f_1}{\partial c} - \frac{\partial f_3}{\partial c}\frac{\partial f_1}{\partial b}\right) = \frac{\Delta}{\delta^5}\left(\delta\frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)\left(F_1 - \mu\right),$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\frac{\partial f_2}{\partial c} - \frac{\partial f_1}{\partial c}\frac{\partial f_2}{\partial b}\right) = \frac{\Delta}{\delta^5}\left(\delta\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \zeta\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)\left(G_1 - \nu\right).$$

Складывая эти выраженія, найдемъ:

$$Q_1 = \frac{\Delta}{\delta^4}\left[\left(E_1\frac{\partial\xi}{\partial t} + F_1\frac{\partial\eta}{\partial t} + G_1\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) - a\left(\lambda\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mu\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nu\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)\right]$$

$$+ \frac{\Delta}{\delta^4}\frac{\partial\delta}{\partial t}\Big[(\lambda x + \mu y + \nu z)a - (E_1 x + F_1 y + G_1 z)\Big].$$

На основанiи перваго изъ уравненiй (4)

$$(\lambda x + \mu y + \nu z)a - (E_1 x + F_1 y + G_1 z) = H_1 - a;$$

поэтому, полагая

$$\left(E_1\frac{\partial\xi}{\partial t} + F_1\frac{\partial\eta}{\partial t} + G_1\frac{\partial\zeta}{\partial t} + H_1\frac{\partial\delta}{\partial t}\right) - a\left(\lambda\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mu\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nu\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial t}\right) = P_1,$$

$$\left(E_2\frac{\partial\xi}{\partial t} + F_2\frac{\partial\eta}{\partial t} + G_2\frac{\partial\zeta}{\partial t} + H_2\frac{\partial\delta}{\partial t}\right) - b\left(\lambda\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mu\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nu\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial t}\right) = P_2,$$

$$\left(E_3\frac{\partial\xi}{\partial t} + F_3\frac{\partial\eta}{\partial t} + G_3\frac{\partial\zeta}{\partial t} + H_3\frac{\partial\delta}{\partial t}\right) - c\left(\lambda\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mu\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nu\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\delta}{\partial t}\right) = P_3,$$

можно написать

$$Q_1 = \frac{\Delta}{\delta^4}P_1,$$

$$Q_2 = \frac{\Delta}{\delta^4}P_2,$$

$$Q_3 = \frac{\Delta}{\delta^4}P_3;$$

а уравненiя (319) можно замѣнить слѣдующими:

$$\frac{da_1}{P_1} = \frac{da_2}{P_2} = \frac{da_3}{P_3}$$

или такими:

$$\frac{da}{a(\sigma a + \tau b + \omega c) + J_1 a + K_1 b + L_1 c + M_1}$$

(323) $$= \frac{db}{b(\sigma a + \tau b + \omega c) + J_2 a + K_2 b + L_2 c + M_2}$$

$$= \frac{dc}{c(\sigma a + \tau b + \omega c) + J_3 a + K_3 b + L_3 c + M_3},$$

если означить производныя коэффиціентовъ по времени значкомъ (′) и положить:

$$
\begin{aligned}
&-(\lambda A_1' + \mu A_2' + \nu A_3' + \alpha') = \sigma, \\
&-(\lambda B_1' + \mu B_2' + \nu B_3' + \beta') = \tau, \\
&-(\lambda C_1' + \mu C_2' + \nu C_3' + \gamma') = \omega,
\end{aligned} \tag{324}
$$

$$
\begin{aligned}
&E_1 A_1' + F_1 A_2' + G_1 A_3' - (\lambda D_1' + \mu D_2' + \nu D_3') = J_1, \\
&E_1 B_1' + F_1 B_2' + G_1 B_3' = K_1, \\
&E_1 C_1' + F_1 C_2' + G_1 C_3' = L_1, \\
&E_1 D_1' + F_1 D_2' + G_1 D_3' + H_1 = M_1,
\end{aligned} \tag{325}
$$

$$
\begin{aligned}
&E_2 A_1' + F_2 A_2' + G_2 A_3' = J_2, \\
&E_2 B_1' + F_2 B_2' + G_2 B_3' - (\lambda D_1' + \mu D_2' + \nu D_3') = K_2, \\
&E_2 C_1' + F_2 C_2' + G_2 C_3' = L_2, \\
&E_2 D_1' + F_2 D_2' + G_2 D_3' + H_2 = M_2,
\end{aligned} \tag{326}
$$

$$
\begin{aligned}
&E_3 A_1' + F_3 A_2' + G_3 A_3' = J_3, \\
&E_3 B_1' + F_3 B_2' + G_3 B_3' = K_3, \\
&E_3 C_1' + F_3 C_2' + G_3 C_3' - (\lambda D_1' + \mu D_2' + \nu D_3') = L_3, \\
&E_3 D_1' + F_3 D_2' + G_3 D_3' + H_3 = M_3.
\end{aligned} \tag{327}
$$

Уравненія (323) могли-бы быть получены непосредственно, если опредѣлять, какъ это дѣлается обыкновенно въ гидрокинематикѣ, линіи тока по условіямъ:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

и принять во вниманіе формулы (172) для скоростей коллинеарно-измѣняемой системы. Выводъ уравненій (323), сдѣланный нами теперь, имѣетъ то преимущество, что связываетъ понятіе о линіяхъ тока непосредственно съ понятіемъ объ огибающихъ и огибаемыхъ.

Способъ для интегрированія уравненій такого вида, какъ уравненія (323), былъ указанъ впервые Hesse[1]). Приложимъ его къ нашимъ

[1]) De integratione equationis differentialis и т. д. J. Crelle, т. 25, стр. 171.

уравненіямъ. Введемъ новую добавочную перемѣнную s и для ея опредѣленія новое уравненіе:

$$-\frac{ds}{(\sigma a+\tau b+\omega c)s}=\frac{da}{a(\sigma a+\tau b+\omega c)+J_1a+K_1b+L_1c+M_1};$$

а перемѣнныя a, b, c замѣнимъ новыми, удовлетворяющими условіямъ:

(328) $$a=\frac{a'}{s}, \qquad b=\frac{b'}{s}, \qquad c=\frac{c'}{s}.$$

Это дастъ слѣдующую систему уравненій:

(329) $$\begin{aligned}&\frac{sda'-a'ds}{a'(\sigma a'+\tau b'+\omega c')+s(J_1a'+K_1b'+L_1c'+M_1s)}\\ &=\frac{sdb'-b'ds}{b'(\sigma a'+\tau b'+\omega c')+s(J_2a'+K_2b'+L_2c'+M_2s)}\\ &=\frac{sdc'-c'ds}{c'(\sigma a'+\tau b'+\omega c')+s(J_3a'+K_3b'+L_3c'+M_3s)}\\ &=-\frac{ds}{\sigma a'+\tau b'+\omega c'},\end{aligned}$$

которая въ свою очередь можетъ быть замѣнена слѣдующею:

$$\frac{da'}{J_1a'+K_1b'+L_1c'+M_1s}=\frac{db'}{J_2a'+K_2b'+L_2c'+M_2s}$$
$$=\frac{dc'}{J_3a'+K_3b'+L_3c'+M_3s}=\frac{ds}{-(\sigma a'+\tau b'+\omega c')}.$$

Вводя еще вспомогательную перемѣнную u, связанную съ предыдущими уравненіями условіемъ:

$$\frac{ds}{-(\sigma a'+\tau b'+\omega c')}=\frac{du}{u},$$

мы можемъ, поступая по извѣстному пріему, написать:

(330) $$\frac{du}{u}=\frac{lda'+mdb'+ndc'+ds}{\lambda(la'+mb'+nc'+s)};$$

причемъ для опредѣленія произвольныхъ множителей l, m, n будемъ имѣть уравненія:

$$\begin{aligned} J_1 l + J_2 m + J_3 n - \sigma &= \lambda l, \\ K_1 l + K_2 m + K_3 n - \tau &= \lambda m, \\ L_1 l + L_2 m + L_3 n - \omega &= \lambda n, \\ M_1 l + M_2 m + M_3 n \quad &= \lambda, \end{aligned} \tag{331}$$

а для опредѣленія λ уравненіе четвертой степени:

$$\begin{vmatrix} J_1 - \lambda, & J_2, & J_3, & -\sigma \\ K_1, & K_2 - \lambda, & K_3, & -\tau \\ L_1, & L_2, & L_3 - \lambda, & -\omega \\ M_1, & M_2, & M_3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{332}$$

Найдя корни этого уравненія, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, мы получимъ четыре системы значеній для множителей l, m, n: (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3), (l_4, m_4, n_4), и сообразно съ этимъ четыре системы дифференціальныхъ уравненій (330). Интегрируя каждое изъ нихъ, найдемъ:

$$(l_1 a' + m_1 b' + n_1 c' + s)^{\frac{1}{\lambda_1}} = C_1 u,$$

$$(l_2 a' + m_2 b' + n_2 c' + s)^{\frac{1}{\lambda_2}} = C_2 u,$$

$$(l_3 a' + m_3 b' + n_3 c' + s)^{\frac{1}{\lambda_3}} = C_3 u,$$

$$(l_4 a' + m_4 b' + n_4 c' + s)^{\frac{1}{\lambda_4}} = C_4 u.$$

Исключая u и сохраняя три произвольныхъ постоянныхъ интегрированія, получимъ:

$$\begin{aligned} c_1(l_1 a' + m_1 b' + n_1 c' + s)^{\frac{1}{\lambda_1}} &= c_2(l_2 a' + m_2 b' + n_2 c' + s)^{\frac{1}{\lambda_2}} \\ = c_3(l_3 a' + m_3 b' + n_3 c' + s)^{\frac{1}{\lambda_3}} &= (l_4 a' + m_4 b' + n_4 c' + s)^{\frac{1}{\lambda_4}} \end{aligned} \tag{333}$$

Положимъ для сокращенія

$$l_i a + m_i b + n_i c + 1 = Q_i;$$

тогда уравненія (333) примутъ слѣдующій видъ:

$$c_1(Q_1 s)^{\frac{1}{\lambda_1}} = c_2(Q_2 s)^{\frac{1}{\lambda_2}} = c_3(Q_3 s)^{\frac{1}{\lambda_3}} = (Q_4 s)^{\frac{1}{\lambda_4}}.$$

Исключая отсюда вспомогательную перемѣнную s и замѣняя отношенія $c_1^{\frac{\lambda_1\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_1}}$, $c_2^{\frac{\lambda_2\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_1}}$, къ $c_3^{\frac{\lambda_3\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_1}}$ новыми произвольными постоянными C и C', получимъ интергалы уравненій (323) въ окончательномъ видѣ:

$$(334)\quad C\frac{(l_1a+m_1b+n_1c+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_1}}}{(l_4a+m_4b+n_4c+1)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_1}}} = C'\frac{(l_2a+m_2b+n_2c+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_2}}}{(l_4a+m_4b+n_4c+1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_4-\lambda_2}}} = \frac{(l_3a+m_3b+n_3c+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_3}}}{(l_4a+m_4b+n_4c+1)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}}.$$

Черезъ каждую точку пространства проходитъ самоогибаемая кривая; задавъ точку (a_0, b_0, c_0) и опредѣливъ по ея координатамъ значенія произвольныхъ постоянныхъ C и C', мы можемъ уравненія соотвѣтственной самоогибаемой представить въ слѣдующемъ симметричномъ видѣ:

$$(335)\quad \frac{(l_4a_0+m_4b_0+n_4c_0+1)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_1}}}{(l_1a_0+m_1b_0+n_1c_0+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_1}}}\cdot\frac{(l_1a+m_1b+n_1c+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_1}}}{(l_4a+m_4b+n_4c+1)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_4-\lambda_1}}} = \frac{(l_4a_0+m_4b_0+n_4c_0+1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_4-\lambda_1}}}{(l_2a_0+m_2b_0+n_2c_0+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_2}}}\cdot\frac{(l_2a+m_2b+n_2c+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_2}}}{(l_4a+m_4b+n_4c+1)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_4-\lambda_2}}}$$

$$= \frac{(l_4a_0+m_4b_0+n_4c_0+1)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}}{(l_3a_0+m_3b_0+n_3c_0+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_3}}} \cdot \frac{(l_3a+m_3b+n_3c+1)^{\frac{\lambda_4}{\lambda_4-\lambda_3}}}{(l_4a+m_4b+n_4c+1)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}}} \quad (335)$$

Эти уравненія могутъ служить для того, чтобы опредѣлить самоогибаемую поверхность, проходящую черезъ заданную кривую

$$\begin{aligned} f_1(a_0,\ b_0,\ c_0) &= 0, \\ f_2(a_0,\ b_0,\ c_0) &= 0. \end{aligned} \quad (336)$$

Между безчисленнымъ множествомъ самоогибаемыхъ поверхностей существуютъ поверхности линейчатыя; онѣ получаются, если уравненія (336) опредѣляютъ прямую линію. Это станетъ яснымъ, если обратиться къ происхожденію самоогибаемой поверхности. Точки прямой (336) получаютъ безконечно-малыя перемѣщенія по поверхности (335), продолжая при этомъ, по свойству коллинеарно-измѣняемой системы, образовать собою прямую линію. Поэтому точки, положенія которыхъ онѣ при этомъ займутъ и которыя также перемѣщаются по поверхности (335), образуютъ собою прямую линію и въ новомъ положеніи и т. д. Такимъ образомъ вся поверхность (335) составится изъ прямыхъ линій.

83. Самоогибаемыя въ однообразномъ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы.

Для однообразнаго движенія коллинеарно-измѣняемой системы уравненія самоогибаемыхъ кривыхъ можно представить въ болѣе простомъ видѣ и параметры ихъ поставить непосредственно въ зависимость отъ координатъ основной точки и положенія неподвижныхъ точекъ системы. Обращаясь для этого къ формуламъ (62) и вводя входящіе туда коэффиціенты въ вычисленіе при опредѣленіи коэффиціентовъ уравненій (4), получимъ по формуламъ (6), (7), (8), (9), (10) и (11):

$$\lambda = -\frac{QA - Q_0X}{s_1Q_0X}, \quad \mu = \frac{QB - Q_0Y}{s_2Q_0Y}, \quad \nu = \frac{QC - Q_0Z}{s_3Q_0Z},$$

$$E_1 = \frac{QA}{Q_0X}, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = 0, \quad H_1 = 0,$$

$$E_2 = 0, \quad F_2 = \frac{QB}{Q_0Y}, \quad G_2 = 0, \quad H_2 = 0,$$

$$E_3 = 0, \quad F_3 = 0, \quad G_3 = \frac{QC}{Q_0Z}, \quad H_3 = 0;$$

а на основаніи этого по формуламъ (324):

$$(337)\quad \sigma = -\frac{1}{s_1}\frac{X'Q - XQ'}{QX},\quad \tau = -\frac{1}{s_2}\frac{Y'Q - YQ'}{QY},\quad \omega = -\frac{1}{s_3}\frac{Z'Q - ZQ'}{QZ};$$

причемъ X' Y' Z', Q' означаютъ производныя по t функцій X, Y, Z, Q.

Далѣе, для составленія уравненій (331) и (332) находимъ по формуламъ (325), (326) и (327):

$$\begin{aligned} J_1 &= s_1\sigma, & K_1 &= 0, & L_1 &= 0, & M_1 &= 0, \\ J_2 &= 0, & K_2 &= -s_2\tau, & L_2 &= 0, & M_2 &= 0, \\ J_3 &= 0, & K_3 &= 0, & L_3 &= -s_3\omega, & M_3 &= 0. \end{aligned}$$

Вслѣдствіе этого уравненіе (332) принимаетъ слѣдующій простой видъ:

$$(\lambda + s_1\sigma)(\lambda + s_2\tau)(\lambda + s_3\omega)\lambda = 0.$$

Четыре корня этого уравненія поэтому будутъ:

$$\lambda_1 = -s_1\sigma,\quad \lambda_2 = -s_2\tau,\quad \lambda_3 = -s_3\omega,\quad \lambda_4 = 0;$$

а для коэффиціентовъ уравненій (331) получатся слѣдующія четыре системы рѣшеній:

$$l_1 = \infty,\ m_1 = \frac{\tau}{s_1\sigma - s_2\tau},\ n_1 = \frac{\omega}{s_1\sigma - s_3\omega},$$

$$l_2 = \frac{\sigma}{s_2\tau - s_1\sigma},\ m_2 = \infty,\ n_2 = \frac{\omega}{s_2\tau - s_3\omega},$$

$$l_3 = \frac{\sigma}{s_3\omega - s_1\sigma},\ m_3 = \frac{\tau}{s_3\omega - s_2\tau},\ n_3 = \infty,$$

$$l_4 = -\frac{1}{s_1},\ m_4 = -\frac{1}{s_2},\ n_4 = -\frac{1}{s_3}.$$

Вмѣсто того, чтобы подставлять эти величины въ общія формулы (334) и находить ихъ истинныя значенія при l_1, m_2, n_3 равныхъ безконечности, можно въ данномъ случаѣ поступить проще. Уравненія (329) принимаютъ теперь слѣдующій видъ:

$$(338)\qquad \frac{da'}{\sigma s_1 a'} = \frac{db'}{\tau s_2 b'} = \frac{dc'}{\omega s_3 c'} = \frac{ds}{\sigma a' + \tau b' + \omega c'}$$

или

$$\frac{\frac{1}{s_1}\,da'}{\sigma a'} = \frac{\frac{1}{s_2}\,db'}{\tau b'} = \frac{\frac{1}{s_3}\,dc'}{\omega c'} = \frac{ds}{\sigma a' + \tau b' + \omega c'}.$$

Складывая числителей и знаменателей первыхъ трехъ отношеній, можно написать:

$$\frac{1}{s_1}\,da' + \frac{1}{s_2}\,db' + \frac{1}{s_3}\,dc' = ds,$$

откуда

$$s = \frac{1}{s_1}\,a' + \frac{1}{s_2}\,b' + \frac{1}{s_3}\,c' + C.$$

Вводя сюда a, b, c, получимъ:

$$s = \frac{C}{1 - \frac{a}{s_1} - \frac{b}{s_2} - \frac{c}{s_3}}. \tag{339}$$

Съ другой стороны первыя три отношенія (338) даютъ:

$$a'^{\frac{1}{s_1\sigma}} = C'b'^{\frac{1}{s_2\tau}} = C''c'^{\frac{1}{s_3\omega}},$$

или, на основаніи зависимостей (328) и (339):

$$C_1\left(\frac{a}{1 - \frac{a}{s_1} - \frac{b}{s_2} - \frac{c}{s_3}}\right)^{\frac{1}{s_1\sigma}} = C_2\left(\frac{b}{1 - \frac{a}{s_1} - \frac{b}{s_2} - \frac{c}{s_3}}\right)^{\frac{1}{s_2\tau}}$$

$$= \left(\frac{c}{1 - \frac{a}{s_1} - \frac{b}{s_2} - \frac{c}{s_3}}\right)^{\frac{1}{s_3\omega}}, \tag{340}$$

гдѣ C_1 и C_2 произвольныя постоянныя. Вводя наконецъ координаты основной точки, можно написать:

$$C_1\left(\frac{a}{1 - \frac{a}{s_1} - \frac{b}{s_2} - \frac{c}{s_3}}\right)^{\frac{X}{Q'X - QX'}} = C_2\left(\frac{b}{1 - \frac{a}{s_1} - \frac{b}{s} - \frac{c}{s_3}}\right)^{\frac{Y}{Q'Y - QY'}} =$$

$$(341) \qquad = \left(\frac{c}{1 - \frac{a}{s_1} - \frac{b}{s_2} - \frac{c}{s_3}}\right)^{\frac{z}{Q'Z - QZ'}}.$$

Отсюда можно было-бы вывести свойства нѣкоторыхъ самоогибаемыхъ поверхностей, указанныя Burmester'омъ [1]).

84. Условіе, чтобы однообразное движеніе коллинеарно-измѣняемой системы было установившееся.

Уравненія (341) показываютъ, что вообще говоря однообразное движеніе не будетъ установившимся, такъ какъ съ теченіемъ времени видъ и положеніе самоогибаемыхъ кривыхъ, какъ и въ общемъ случаѣ, мѣняются. Для того, чтобы это движеніе было установившимся, нужно, чтобы движеніе основной точки (X, Y, Z) удовлетворяло нѣкоторымъ требованіямъ, которыя мы теперь и найдемъ. Условіе, чтобы самоогибаемыя были неизмѣнны, состоитъ, какъ мы видѣли въ § 81, въ томъ, чтобы отношенія между функціями Q_1, Q_2, Q_3 въ уравненіяхъ (319) не зависѣли отъ t. Теперь

$$Q_1 = a\,(\sigma a + \tau b + \omega c) - s_1 \sigma a,$$

$$Q_2 = b\,(\sigma a + \tau b + \omega c) - s_2 \tau b,$$

$$Q_3 = c\,(\sigma a + \tau b + \omega c) - s_3 \omega c,$$

и условіе это можетъ быть выполнено только въ томъ случаѣ, если отношенія между величинами σ, τ, ω не будутъ зависѣть отъ t. Принимая во вниманіе формулы (337), можно эти условія выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{Y'Q - YQ'}{Y} = k_1 \frac{X'Q - XQ'}{X},$$

$$\frac{Z'Q - ZQ'}{Z} = k_2 \frac{X'Q - XQ'}{X},$$

гдѣ k_1 и k_2 произвольныя величины, не зависящія отъ t. Написавъ эти уравненія въ слѣдующемъ видѣ:

---

[1]) Schlömilchs Zeitschrift für Math. n. Phys. B. 23.

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} - \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = k_1\left(\frac{1}{X}\frac{dX}{dt} - \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}\right),$$

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dt} - \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = k_2\left(\frac{1}{X}\frac{dX}{dt} - \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}\right),$$

и, интегрируя, получимъ:

$$\frac{Y}{Q} = C_1\left(\frac{X}{Q}\right)^{k_1}, \quad \frac{Z}{Q} = C_2\left(\frac{X}{Q}\right)^{k_2},$$

гдѣ C_1 и C_2 суть постоянныя интегрированія, которыя могутъ быть опредѣлены по начальному положенію основной точки. Подставляя выраженіе для Q по формулѣ (61) и замѣняя для симметричности k_1 и k_2 черезъ $\frac{n_1}{n_2}$ и $\frac{n_1}{n_3}$, можемъ написать:

$$c'\left(\frac{X}{\frac{X}{s_1}+\frac{Y}{s_2}+\frac{Z}{s_3}-1}\right)^{n_1} = c''\left(\frac{Y}{\frac{X}{s_1}+\frac{Y}{s_1}+\frac{Z}{s_3}-1}\right)^{n_2}$$

$$=\left(\frac{Z}{\frac{X}{s_1}+\frac{Y}{s_2}+\frac{Z}{s_3}-1}\right)^{n_3}.$$

Такимъ образомъ *для того, чтобы однообразное движеніе коллинеарно-измѣняемой системы было установившимся, нужно, чтобы траекторія основной точки была такого-же вида, каковы самоогибаемыя кривыя въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы.* Это заключеніе можетъ быть очевидно приложено и къ частнымъ видамъ коллинеарно-измѣняемой системы.

Переходя къ болѣе близкому разбору самоогибаемыхъ въ движеніи коллинеарно-измѣняемой системы, мы будемъ имѣть въ виду исключительно общій случай ея движенія, т. е. когда это движеніе заключаетъ въ себѣ и раздвиганіе [1]).

---

[1]) Для плоской однородно-измѣняемой системы самоогибаемыя (линіи токовъ) были разобраны Жуковскимъ (Кинем. жидкаго тѣла, Матем. Сборн. Моск. Мат. Общ. 1873), для подобно-измѣнямой системы Müller'омъ (Schlöm. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1877). Для однородно-измѣня-

85. Самоогибаемые конусы.

Мы воспользуемся найденными формулами для опредѣленія конусовъ, содержащихъ въ себѣ всѣ векторы, которые въ данный элементъ времени перемѣщаются по этимъ конусамъ. Эти конусы суть очевидно самоогибаемыя поверхности. Свойства ихъ могутъ служить для характеристики движенія коллинеарно-измѣняемой системы [1]). Въ приложеніи къ коллинеарно-измѣняемой системѣ разсматриваніе конусовъ девіаціи съ удобствомъ можетъ быть сведено къ изученію самоогибаемыхъ кривыхъ плоской коллинеарно-измѣняемой системы. Въ случаѣ существованія четырехъ основныхъ плоскостей (см. § 52) будемъ опредѣлять конусы девіаціи, имѣющіе своею вершиною одну изъ вершинъ тетраэдра, образуемаго основными плоскостями. Для этого можемъ найти самоогибаемыя кривыя на грани тетраэдра, противуположной этой вершинѣ; полученныя кривыя будутъ слѣдами конусовъ девіаціи, и по нимъ можно судить о самыхъ конусахъ. Точно такъ-же въ случаѣ существованія двухъ основныхъ плоскостей можно опредѣлить конусы девіаціи, имѣющіе своею вершиною неподвижную точку на одной изъ основныхъ плоскостей, разсматривая самоогибаемыя линіи на другой основной плоскости.

86. Самоогибаемыя линіи на грани основнаго тетраэдра.

Въ случаѣ существованія четырехъ основныхъ плоскостей состояніе движенія точекъ на грани тетраэдра, этими плоскостями образуемаго, можно въ теченіе безконечно-малаго элемента времени считать *однообразнымъ*, такъ какъ три точки остаются въ теченіе этого времени неподвижными. Поэтому, предполагая, что начало координатъ взято въ одной изъ этихъ точекъ, а оси проходятъ черезъ двѣ другія неподвижныя точки, можемъ прямо по формуламъ (340) написать уравненія самоогибаемыхъ кривыхъ:

емой системы трехъ измѣреній и для коллинеарно-измѣняемой системы двухъ измѣреній нѣкоторыя замѣчанія объ этомъ можно найти у Burmester'a (Schlöm. Zeits. f. Math. u. Phys. B. 23). Для твердаго тѣла самоогибаемыя суть винтовыя линіи, и винтовое движеніе твердаго тѣла есть единственное установившееся.

[1]) Жуковскій называетъ ихъ конусами девіаціи и изучаетъ ихъ въ приложеніи къ однородно-измѣняемой системѣ (Кинем. жидк. тѣла, Матем. Сборн. Моск. Мат. Общ. 1873).

$$\left(\frac{b}{1-\frac{a}{s_1}-\frac{b}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_2\tau}}=C\left(\frac{a}{1-\frac{a}{s_1}-\frac{b}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_1\sigma}}, \qquad (342)$$

гдѣ C произвольная постоянная, s_1 и s_2 длины сторонъ треугольника, сходящихся въ началѣ координатъ, а по формуламъ (61) и (337):

$$\sigma=\frac{\alpha'}{\alpha s_1+1},\quad \tau=\frac{\beta'}{\beta s_2+1}.$$

Такъ какъ α и β никакими условіями не ограничены, то степени $\frac{1}{s_1\sigma}$ и $\frac{1}{s_2\tau}$ могутъ имѣть всякія значенія; означимъ ихъ для краткости черезъ p_1 и p_2.

Чтобы составить себѣ понятіе о видѣ кривыхъ (342) и о ихъ положеніи относительно сторонъ треугольника, образуемаго мгновенными центрами, разсмотримъ, какъ измѣняется направленіе этихъ линій въ различныхъ точкахъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ, съ измѣненіемъ направленія этихъ прямыхъ. Для этого опредѣлимъ изъ уравненія (342) $\frac{da}{db}$. Это уравненіе можно такъ представить:

$$R^{p_1-p_2}=C\frac{a^{p_1}}{b^{p_2}},$$

положивъ

$$1-\frac{a}{s_1}-\frac{b}{s_2}=R.$$

Отсюда, логариѳмируя и дифференцируя, получимъ:

$$\left(\frac{p_1-p_2}{s_1}\frac{1}{R}+\frac{p_1}{a}\right)da+\left(\frac{p_1-p_2}{s_2}\frac{1}{R}-\frac{p_2}{b}\right)db=0,$$

откуда

$$\frac{db}{da}=\frac{\frac{p_1-p_2}{s_1}ab+p_1bR}{p_2aR-\frac{p_1-p_2}{s_2}ab}=\frac{b}{a}\,\frac{p_1-\frac{p_2}{s_1}a-\frac{p_1}{s_2}b}{p_2-\frac{p_2}{s_1}a-\frac{p_1}{s_2}b}. \qquad (343)$$

Свойство скоростей, указанное въ § 56 относительно точекъ, скорости которыхъ параллельны одной изъ сторонъ треугольника, образо-

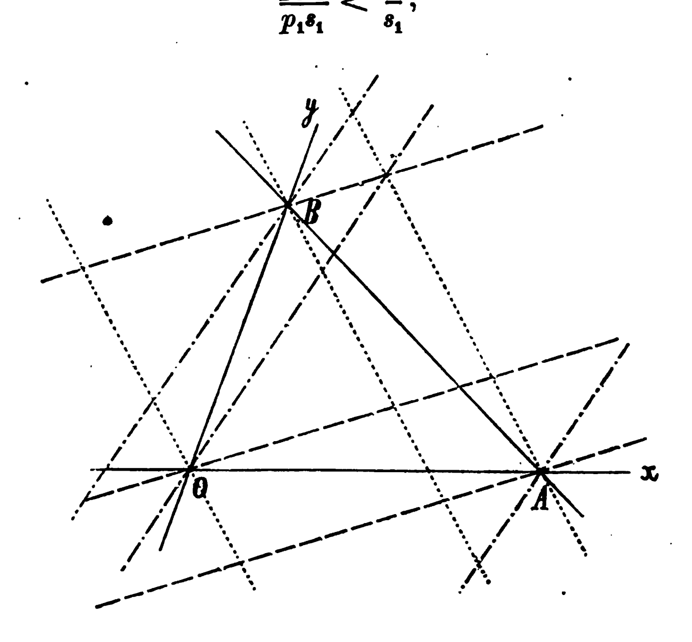
ваннаго осями скоростей, можетъ служить при изученіи распредѣленія самоогибаемыхъ линій. Формула (343) показываетъ, что точки, скорости которыхъ параллельны оси (x), лежатъ на прямой

$$(344) \qquad b = s_2 - \frac{p_2 s_2}{p_1 s_1} a;$$

а на основаніи показаннаго въ § 56 точки, скорости которыхъ параллельны двумъ другимъ сторонамъ треугольника, лежатъ на прямыхъ, параллельныхъ прямой (344). Каждая изъ трехъ прямыхъ проходитъ соотвѣтственно черезъ вершину треугольника, противуположную той сторонѣ, которой скорости параллельны. Одна изъ трехъ прямыхъ будетъ поэтому пересѣкать самый треугольникъ и сообразно съ этимъ мы получаемъ три различныхъ случая относительно расположенія самоогибаемыхъ линій.

1) $p_1 - p_2 > 0$, p_1 и p_2 одного знака; въ этомъ случаѣ,

$$\frac{p_2 s_2}{p_1 s_1} < \frac{s_2}{s_1};$$



слѣдовательно прямая, проходящая черезъ точку A, пересѣкаетъ треугольникъ.

2) $p_1 - p_2 < 0$, p_1 и p_2 одного знака; теперь

$$\frac{p_2 s_2}{p_1 s_1} > \frac{s_2}{s_1};$$

поэтому прямая, проходящая черезъ точку B, пересѣкаетъ треугольникъ.

3) p_1 и p_2 противуположныхъ знаковъ; угловой коэффиціентъ прямой (344)

$$-\frac{p_2 s_2}{p_1 s_1} > 0;$$

слѣдовательно прямая, проходящая черезъ начало координатъ, пересѣкаетъ треугольникъ.

Впрочемъ для выясненія характера самоогибаемыхъ линій достаточно разобрать одинъ изъ этихъ случаевъ. Мы будемъ далѣе предполагать, что

$$p_1 - p_2 > 0,\ p_1 > 0,\ p_2 > 0. \tag{345}$$

Пусть будетъ

$$b = ka, \tag{346}$$

одна изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ. Направленія самоогибаемыхъ линій въ точкахъ, въ которыхъ онѣ пересѣкаютъ прямую (346), опредѣляются формулою

$$\frac{db}{da} = k\,\frac{p_1 - \left(\frac{p_2}{s_1} + \frac{p_1}{s_2}k\right)a}{p_2 - \left(\frac{p_2}{s_1} + \frac{p_1}{s_2}k\right)a}. \tag{347}$$

Давая здѣсь k различныя значенія и каждый разъ измѣняя a отъ $-\infty$ до $+\infty$, можемъ видѣть, что выраженіе (347):

$$f(a) = k\,\frac{p_1 - \alpha a}{p_2 - \alpha a},$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{p_2}{s_1} + \frac{p_1}{s_2}k,$$

при данномъ значеніи k или постоянно возрастаетъ, или постоянно убываетъ, ибо производная

$$f'(a) = k \cdot \alpha \cdot \frac{p_1 - p_2}{(p_2 - \alpha a)^2}$$

по условію (345) знака не мѣняетъ. Такимъ образомъ функція $f(a)$ будетъ возрастающею или при

$$k < 0, \quad \alpha < 0,$$

т. е. когда

$$-\infty < k < -\frac{p_2 s_2}{p_1 s_1}$$

или при

$$k > 0, \quad \alpha > 0,$$

т. е. вообще при всякомъ положительномъ k, и убывающею при

$$k < 0, \quad \alpha > 0,$$

т. е. когда

$$0 > k > -\frac{p_2 s_2}{p_1 s_1},$$

Итакъ для характеристики самоогибаемыхъ линій можно составить слѣдующія три таблицы:

1-й случай: $-\infty < k < -\frac{p_2 s_2}{p_1 s_1}$:

a	$\frac{db}{da}$
$-\infty$	k
отъ $-\infty$ *до* $\frac{p_1}{\alpha}$	*отъ* k *до* 0
отъ $\frac{p_1}{\alpha}$ *до* $\frac{p_2}{\alpha}$	*отъ* 0 *до* $+\infty$
отъ $\frac{p_2}{\alpha}$ *до* 0	*отъ* $-\infty$ *до* $k\frac{p_1}{p_2}$
отъ 0 *до* $+\infty$	*отъ* $k\frac{p_1}{p_2}$ *до* k;

$\frac{db}{da}$ постоянно возрастаетъ.

2-й случай: $-\frac{p_2 s_2}{p_1 s_1} < k < 0$,

a	$\frac{db}{da}$
$-\infty$	k
отъ $-\infty$ *до* 0	*отъ* k *до* $k\frac{p_2}{p_1}$
отъ 0 *до* $\frac{p_2}{a}$	*отъ* $k\frac{p_2}{p_1}$ *до* $-\infty$
отъ $\frac{p_2}{a}$ *до* $\frac{p_1}{a}$	*отъ* $+\infty$ *до* 0
отъ $\frac{p_1}{a}$ *до* $+\infty$	*отъ* 0 *до* k;

$\frac{db}{da}$ постоянно убываетъ.

3-й случай: $k > 0$.

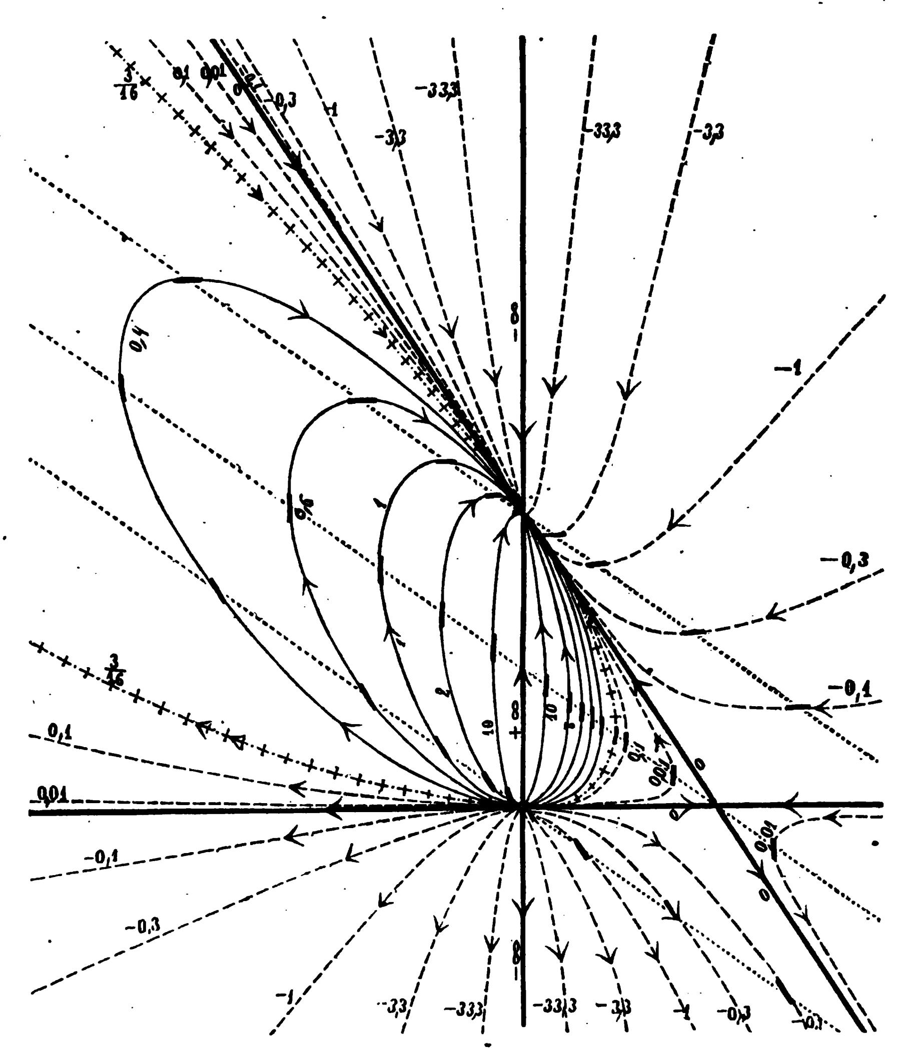
a	$\frac{db}{da}$
$-\infty$	k
отъ $-\infty$ *до* 0	*отъ* k *до* $k\frac{p_1}{p_2}$
отъ 0 *до* $\frac{p_2}{a}$	*отъ* $k\frac{p_1}{p_2}$ *до* $+\infty$
отъ $\frac{p_2}{a}$ *до* $\frac{p_1}{a}$	*отъ* $-\infty$ *до* 0
отъ $\frac{p_1}{a}$ *до* $+\infty$	*отъ* 0 *до* k;

$\frac{db}{da}$ постоянно возрастаетъ.

Принимая во вниманіе: 1) эти результаты, 2) то, что было сказано въ § 55 относительно движенія на ребрахъ тетраэдра, 3) то обстоятельство, что проекціи скоростей суть непрерывныя функціи координатъ, 4) то, что нигдѣ не можетъ быть точекъ перегиба, если исключить самыя оси скоростей, какъ это можно видѣть, составивъ выраженіе для $\frac{d^2a}{db^2}$, и наконецъ 5), что всѣ кривыя касаются оси x въ началѣ ко-

ординатъ, — мы можемъ наглядно представить себѣ расположеніе самоогибаемыхъ линій. На чертежѣ онѣ изображены въ предположеніи, что

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 3.$$



Въ этомъ случаѣ онѣ представляются коническими сѣченіями и притомъ эллипсами, если въ уравненіи (342)

$$C > \tfrac{3}{16},$$

параболой при

$$C = \tfrac{3}{16}$$

и гиперболами при

$$C < \tfrac{3}{16}.$$

Эти кривыя касаются нетолько оси (x) въ началѣ координатъ, но касаются еще прямой

$$1 - \frac{a}{s_1} - \frac{b}{s_2} = 0$$

въ точкѣ ея пересѣченія съ осью (y).

Прямая (344) имѣетъ здѣсь угловой коэффиціентъ

$$-\frac{p_2 s_2}{p_1 s_1} = -\frac{3}{4}.$$

Три такія параллельныя между собою прямыя обозначены на чертежѣ точками и чертами.

87. Самоогибаемыя линіи основныхъ плоскостей въ случаѣ, когда двѣ изъ этихъ плоскостей мнимыя.

Въ случаѣ существованія только двухъ дѣйствительныхъ основныхъ плоскостей въ каждой изъ нихъ имѣется, какъ мы видѣли въ §§ 58 — 60, основная прямая — пересѣченіе основныхъ плоскостей. Принимая одинъ изъ центровъ скоростей за вершину конусовъ девіацій и разсматривая самоогибаемыя кривыя въ другой основной плоскости, мы получимъ понятіе объ этихъ конусахъ девіацій.

Дифференціальное уравненіе самоогибаемыхъ кривыхъ можно написать въ слѣдующемъ видѣ, если начало координатъ перенести въ центръ скоростей:

$$\frac{da}{a(Pa + Qb) + L_1 a + M_1 b} = \frac{db}{b(Pa + Qb) + L_2 a + M_2 b}. \quad (348)$$

Если принять во вниманіе, что теперь въ основной плоскости существуетъ только одна ось скоростей (§ 59), а уравненіе (220), служащее для отысканія осей скоростей въ плоской коллинеарно-измѣняемой системѣ, имѣетъ теперь видъ:

$$\begin{vmatrix} L_1 + \lambda_1, L_2, P \\ M_1, M_2 + \lambda, Q \\ 0, \quad 0, \quad \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и должно имѣть два мнимыхъ корня, то мы видимъ, что коэффиціенты уравненія (348) должны быть связаны условіемъ:

(349) $$(L_1 - M_2)^2 + 4M_1L_2 < 0.$$

Это условіе намъ придется принять во вниманіе.

Въ настоящемъ случаѣ, вмѣсто примѣненія къ уравненію (348) общихъ формулъ (334), можно его проинтегрировать, приведя его къ линейному дифференціальному уравненію. Это можетъ быть сдѣлано по извѣстному пріему слѣдующимъ образомъ. Уравненіе (348) можно написать въ такомъ видѣ:

$$(adb - bda)(Pa + Qb) + (L_1a + M_1b)db - (L_2a + M_2b)da = 0.$$

Введя новую перемѣнную u по условію

(350) $$b = au,$$

имѣемъ

$$\frac{1}{a^2}\frac{da}{du} + \frac{L_1 + M_1u}{u(L_1 + M_1u) - (L_2 + M_2u)} \cdot \frac{1}{a}$$
$$= \frac{P + Qu}{u(L_1 + M_1u) - (L_2 + M_2u)}.$$

Это уравненіе дѣлается линейнымъ подстановкою

(351) $$\frac{1}{a} = z,$$

а именно

$$\frac{dz}{du} - \frac{L_1 + M_1u}{u(L_1 + M_1u) - (L_2 + M_2u)} \cdot z$$
$$= \frac{P + Qu}{u(L_1 + M_1u) - (L_2 + M_2u)}.$$

Полагая

$$\frac{L_1 + M_1u}{M_1u^2 + (L_1 - M_2)u - L_2} = U$$

$$\frac{P + Qu}{M_1u^2 + (L_1 - M_2)u - L_2} = V,$$

будемъ имѣть

$$z = e^{\int U du} \left(\int e^{-\int U du} V du + C \right).$$

Такъ какъ по условію (349) корни уравненія

$$M_1 u^2 + (L_1 - M_2) u - L_2 = 0$$

мнимые, то, положивъ

$$-\frac{L_1 - M_2}{2M_1} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{-(L_1 - M_2)^2 - 4M_1 L_2}}{2M_1} = \beta,$$

найдемъ

$$\int U du = \tfrac{1}{2} lg[(u-\alpha)^2 + \beta^2] + \frac{M_1\alpha + L_1}{M_1\beta} arctg \frac{u-\alpha}{\beta};$$

и стало-быть

$$z = \sqrt{(u-\alpha)^2 + \beta^2} \,.\, e^{\frac{M_1\alpha + L_1}{M_1\beta} arctg \frac{u-\alpha}{\beta}}$$

$$\times \left[\int \frac{e^{-\frac{M_1\alpha + L_1}{M_1\beta} arctg \frac{u-\alpha}{\beta}} (P + Qu)}{M_1 [(u-\alpha)^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} du + C \right].$$

Для дальнѣйшаго интегрированія положимъ

$$\begin{aligned} \frac{u-\alpha}{\beta} &= tg\varphi, \\ \frac{M_1\alpha + L_1}{M_1\beta} &= k; \end{aligned} \tag{352}$$

такъ что будемъ имѣть:

$$z = \frac{e^{k\varphi}}{M_1\beta \cos\varphi} \left(\int e^{-k\varphi} [(P + Q\alpha)\cos\varphi + Q\beta \sin\varphi] d\varphi + C' \right)$$

$$= \frac{P + Q\alpha}{M_1\beta} tg\varphi + \frac{C'}{M_1\beta} \frac{e^{k\varphi}}{\cos\varphi}$$

$$+ \frac{(P + Q\alpha)k + Q\beta}{M_1\beta} \frac{e^{k\varphi}}{\cos\varphi} \int e^{-k\varphi} \sin\varphi d\varphi =$$

$$= - \frac{k(P+Q\alpha)+Q\beta}{(1+k^2)M_1\beta} + \frac{P+(\alpha-k\beta)Q}{(1+k^2)M_1\beta} tg\varphi + \frac{C'}{M_1\beta}\frac{e^{k\varphi}}{\cos\varphi}.$$

Итакъ для z находимъ выраженіе слѣдующаго вида:

$$(353) \qquad z = A + Btg\varphi + C\frac{e^{k\varphi}}{\cos\varphi},$$

если для краткости положить

$$\frac{k(P+Q\alpha)+Q\beta}{(1+k^2)M_1\beta} = A,$$

$$\frac{P+(\alpha-k\beta)Q}{(1+k^2)M_1\beta} = B, \qquad \frac{C'}{M_1\beta} = C.$$

Уравненіе (353) показываетъ, что въ случаѣ мнимости двухъ основныхъ плоскостей самоогибаемыя будутъ линіями, имѣющими характеръ спиралей. Чтобы видъ этихъ кривыхъ изслѣдовать, введемъ въ разсмотрѣніе полярныя координаты, избравъ полюсомъ центръ скоростей, т. е. положивъ

$$a = \rho\cos\vartheta,$$
$$b = \rho\sin\vartheta.$$

Перемѣнныя φ и z связаны съ полярными координатами по условіямъ (350), (351) и (352) слѣдующими зависимостями:

$$z = \frac{1}{\rho\cos\vartheta}, \qquad tg\varphi = \frac{tg\vartheta - \alpha}{\beta}.$$

Отсюда видно, что $\cos\varphi$ и $tg\varphi$ при измѣненіи угла ϑ на величину 2π будутъ принимать прежнія значенія. Поэтому, если уравненіе (353) написать такъ:

$$\frac{1}{\rho} = A\cos\vartheta + B\cos\vartheta . tg\varphi + C\frac{e^{k\varphi}\cos\vartheta}{\cos\varphi},$$

то, при измѣненіи ϑ на величину 2π, $\frac{1}{\rho}$ не принимаетъ прежнихъ значеній, ибо въ послѣднемъ членѣ является множитель $e^{2\pi k}$. Слѣдовательно, если C' не взято равнымъ нулю, то съ каждымъ оборотомъ около центра скоростей векторъ, проведенный изъ него къ точкѣ на самооги-

баемой, постоянно возрастаетъ или постоянно убываетъ, что служитъ признакомъ линій спиральнаго характера.

Замѣтимъ еще, что подробное выраженіе коэффиціентовъ A и B въ первоначальныхъ коэффиціентахъ:

$$A = \frac{PM_1(M_2 + L_1) + QL_1(M_2 - L_1) - 2M_1L_2Q}{2M_1(M_1L_2 - L_1M_2)},$$

$$B = \frac{(QL_1 - PM_1)\sqrt{-(L_1 - M_2)^2 - 4M_1L_2}}{2M_1(M_1L_2 - L_1M_2)},$$

показываетъ, что A и B могутъ имѣть всякія значенія, положительныя и отрицательныя.

Вводя въ уравненіе самоогибаемой окончательно полярныя координаты, получимъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{1}{\rho} = D\cos\vartheta + E\sin\vartheta + \tag{354}$$

$$+ Ce^{k\,\operatorname{arctg}(\gamma\operatorname{tg}\vartheta + \delta)}\sqrt{F\cos^2\vartheta + G\sin\vartheta\cos\vartheta + \sin^2\vartheta},$$

гдѣ D, E, F, G, k, γ и δ выражаются черезъ первоначальные коэффиціенты слѣдующимъ образомъ:

$$D = \frac{PM_2 - QL_2}{M_1L_2 - L_1M_2}, \qquad E = \frac{QL_1 - PM_1}{M_1L_2 - L_1M_2},$$

$$F = -\frac{L_2}{M_1}, \qquad G = \frac{L_1 - M_2}{M_1},$$

$$k = \frac{M_2 + L_1}{\sqrt{-(L_1 - M_2)^2 - 4M_1L_2}}, \quad \gamma = \frac{2M_1}{\sqrt{-(L_1 - M_2)^2 - 4M_1L_2}},$$

$$\delta = \frac{L_1 - M_2}{\sqrt{-(L_1 - M_2)^2 - 4M_1L_2}}.$$

Для выясненія характера спиральныхъ линій замѣтимъ еще, что подкоренное выраженіе въ уравненіи (354) никогда не обращается въ нуль благодаря условію (349); поэтому, при достаточно большомъ числѣ оборотовъ, послѣдній членъ въ знаменателѣ уравненія (354) будетъ постоянно оставаться больше суммы двухъ первыхъ членовъ и векторъ ρ, сохраняя конечныя значенія, будетъ убывать съ каждымъ обо-

ротомъ. Онъ обратится въ нуль при безконечно большомъ числѣ оборотовъ; слѣдовательно *центръ скоростей служитъ ассимптотической точкою для всѣхъ самоогибаемыхъ.* Одна изъ самоогибаемыхъ, соотвѣтствующая значенію произвольной постоянной

$$C = 0,$$

обращается въ прямую линію. Очевидно, что эта прямая есть ось скоростей, т. е. пересѣченіе обѣихъ основныхъ плоскостей.

88. Примѣръ системы самоогибаемыхъ линій для случая, когда двѣ основныя плоскости мнимыя.

Для нагляднаго изображенія того, какъ распредѣляются самоогибаемыя линіи въ основной плоскости, возьмемъ слѣдующія значенія коэффиціентовъ:

$$L_1 = M_1 = M_2, \quad L_2 = -M_1, \quad P = Q = -M_1.$$

Тогда въ уравненіи (354) будемъ имѣть

$$D = 1, \quad E = 0, \quad F = 1, \quad G = 0, \quad k = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 0,$$

и уравненіе (354) принимаетъ видъ:

$$\rho = \frac{1}{\cos\vartheta + Ce^{\vartheta}}. \tag{355}$$

Чтобы получить всѣ эти спиральныя линіи, нѣтъ надобности давать произвольной постоянной C всѣ возможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Если разсматривать сначала только положительныя значенія C, то достаточно взять ихъ отъ какого-нибудь

$$C = C_0$$

до

$$C = C_0 e^{2\pi};$$

такъ какъ точки спирали, для которой

$$C_0 e^{4\pi} > C > C_0 e^{2\pi},$$

совпадаютъ съ точками другой спирали, для которой

$$C_0 e^{2\pi} > C > C_0,$$

если разсматривать значенія аргумента ϑ на 2π меньше предыдущихъ.

Прежде чѣмъ выбрать сообразно съ этимъ наиболѣе удобные предѣлы для C, замѣтимъ слѣдующее свойство разсматриваемыхъ кривыхъ. Кривая уходитъ въ безконечность при значеніяхъ ϑ, для которыхъ

$$\cos\vartheta + Ce^{\vartheta} = 0.$$

Каждому значенію ϑ соотвѣтствуетъ одно такое значеніе коэффиціента C:

$$C = -\cos\vartheta . e^{-\vartheta}.$$

Но если разсматривать только одинъ оборотъ около ассимптотической точки, напр. отъ $\vartheta = 0$ до $\vartheta = 2\pi$, то для C существуетъ предѣльное значеніе, при переходѣ черезъ которое векторъ ρ въ безконечность уже не обращается. Очевидно, что ρ можетъ обращаться въ безконечность (когда $0 < \vartheta < 2\pi$) при $C = 0$ и при достаточно малыхъ значеніяхъ C. Предѣльное значеніе для C мы получимъ, опредѣливъ *maximum* функціи

$$f(\vartheta) = -\cos\vartheta . e^{-\vartheta} \tag{356}$$

для аргументовъ

$$0 < \vartheta < 2\pi.$$

Этотъ *maximum* будетъ единственный, а именно при

$$\vartheta = \frac{3}{4}\pi,$$

и соотвѣтствующее этому значеніе для C будетъ:

$$C = -\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) . e^{-\frac{3}{4}\pi} = 0{,}06694676\ldots..$$

Итакъ тѣ кривыя, для которыхъ C заключается между 0 и 0,0669...., удаляются въ безконечность при нѣкоторыхъ значеніяхъ ϑ, находящихся между 0 и 2π. Кривыя, для которыхъ

$$C > 0{,}0669\ldots..,$$

при этихъ значеніяхъ аргумента въ безконечность не уходятъ, но за то удаляются въ безконечность для нѣкоторыхъ отрицательныхъ значеній ϑ,

находящихся между — 2π и 0; ибо кривая, для которой $C > 0{,}0669...$, совпадаетъ съ нѣкоторою кривою, для которой $C < 0{,}0669...$, на основаніи замѣченнаго выше. Эти значенія C тоже имѣютъ предѣлъ, который мы найдемъ, опредѣливъ *maximum* функціи (356) для ϑ, заключающихся между -2π и 0. Этотъ *maximum* будетъ при

$$\vartheta = -\frac{5}{4}\pi$$

и будетъ равенъ

$$-\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right).e^{\frac{5}{4}\pi} = 0{,}0669.....e^{2\pi}.$$

Продолжая эти разсужденія дальше, мы найдемъ, что при значеніяхъ C, заключающихся въ предѣлахъ между $0{,}0669....e^{2\pi}$ и $0{,}0669....e^{4\pi}$, получаются кривыя, которыя удаляются въ безконечность при значеніяхъ аргумента, заключающихся между -2π и -4π, и т. д.

Такимъ образомъ всѣ положительныя значенія C можно разбить на группы, раздѣленныя между собою значеніями

$$.....\frac{e^{-\frac{19}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\quad \frac{e^{-\frac{11}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\quad \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\quad \frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\quad \frac{e^{\frac{13}{4}\pi}}{\sqrt{2}},.....$$

и достаточно разсмотрѣть значенія C, заключающіяся между двумя какими-нибудь смежными членами предыдущаго ряда, чтобы получить всю систему спиралей, соотвѣтствующихъ положительнымъ значеніямъ этого параметра. Ввиду этого предѣлами для C возьмемъ

$$\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}} = 0{,}0669.....\quad \text{и} \quad \frac{e^{-\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}} = 35{,}8......$$

По предыдущему кривыя, соотвѣтствующія этимъ двумъ значеніямъ параметра C, совпадаютъ въ одну кривую, которая и изображена на чертежѣ. Она состоитъ изъ спиральной линіи OA, уходящей въ безконечность и которую мы получимъ, измѣняя C отъ $+\infty$, соотвѣтствующей ассимптотической точкѣ, до положительнаго C, удовлетворяющаго уравненію

$$\cos\vartheta + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\vartheta - \frac{3}{4}\pi} = 0,$$

и изъ ряда отдѣльныхъ вѣтвей BC, DE, ... уходящихъ въ безконечность при другихъ, отрицательныхъ рѣшеніяхъ того-же уравненія. Эти вѣтви, съ уменьшеніемъ аргумента ϑ, безпредѣльно приближаются къ совпаденію съ осью скоростей, MN, проходя около нея поочередно то съ той, то съ другой стороны. Беря для C возрастающія значенія въ выбранныхъ нами предѣлахъ, мы получимъ кривыя такого-же характера, состоящія изъ спиралей и изъ отдѣльныхъ вѣтвей. Завитки спиралей, соотвѣтствующихъ измѣненіямъ аргумента ϑ отъ 0 до 2π, съ возрастаніемъ C постепенно уменьшаются, а при $C = 35{,}8$ .... приходятъ въ совпаденіе съ OA. Эти спирали изображены на чертежѣ для слѣдующихъ значеній C:

$$\tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{3},\ 1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 20.$$

Первая изъ вѣтвей этихъ кривыхъ, соотвѣтствующая отрицательнымъ значеніямъ аргумента, проходитъ между осью скоростей и линіею BC, тѣмъ ближе къ послѣдней, чѣмъ больше значеніе C, и совпадаетъ съ BC при $C = 35{,}8$. .... Вторая изъ вѣтвей, находящаяся по другую сторону отъ оси скоростей, тѣмъ дальше отъ нея, чѣмъ больше C, и при $C = 35{,}8$ .... вся лежитъ въ безконечности. Остальныя вѣтви заполняютъ собою промежутки между соотвѣтственными вѣтвями кривой, для которой $C = 0{,}0669$ .... На чертежѣ изображены первыя вѣтви для C, равнаго $\frac{1}{3}$, 1, 2, 5 и 10, и вторыя вѣтви для C, равнаго 2, 5, 10 и 20.

Кривыя, соотвѣтствующія отрицательнымъ значеніямъ параметра C, намъ разсматривать отдѣльно не нужно, ибо, какъ легко видѣть, эти кривыя совпадаютъ съ предыдущими. Дѣйствительно, пусть будетъ

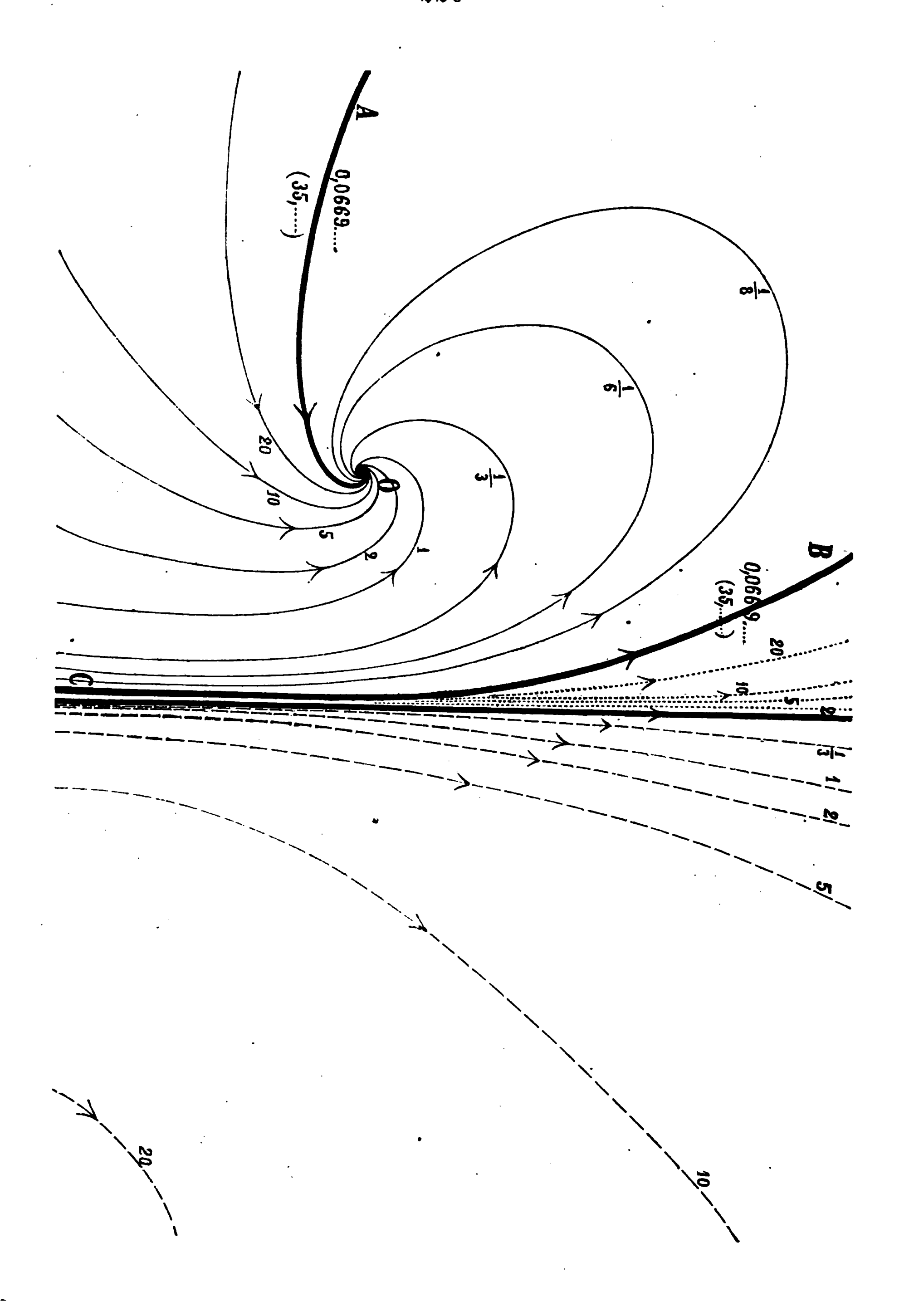
$$C = -C',$$

гдѣ C' положительное. Тогда можно уравненіе кривой (355) представить въ такомъ видѣ:

$$\rho = -\frac{1}{-\cos\vartheta + C' e^{\vartheta}}$$

или, положивъ

$$\vartheta = \vartheta' + \pi,$$


A
0,0669....
(35,....)
B
0,0669....
(35,....)
C
O
1/8
1/6
1/3
1
2
5
10
20

т. е. измѣнивъ направленіе оси полярныхъ координатъ на два прямыхъ угла,

$$\rho = - \frac{1}{\cos\vartheta' + C' e^{\pi} . e^{\vartheta'}}. \tag{357}$$

Принимая во вниманіе, что перемѣна знака у вектора полярныхъ координатъ показываетъ, что онъ долженъ быть откладываемъ въ направленіи противуположномъ тому, которое опредѣляется соотвѣтственнымъ аргументомъ, и что мы измѣнили направленіе оси полярныхъ координатъ на противуположное, мы и видимъ, что кривыя (357) совпадаютъ съ кривыми

$$\rho = \frac{1}{\cos\vartheta + C' e^{\pi} e^{\vartheta}},$$

т. е. съ кривыми, раньше разсмотрѣнными. Соотвѣтствующіе другъ другу параметры связаны при этомъ только условіемъ

$$C'' = C' e^{\pi}.$$

B. Объемное расширеніе коллинеарно-измѣняемой системы.

89. Извѣстное свойство однородно-измѣняемой системы,—что объемное расширеніе ея происходитъ одинаковымъ образомъ во всѣхъ ея точкахъ, — уже не имѣетъ мѣста въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы. Чтобы объемное расширеніе этой послѣдней системы опредѣлить, обратимся къ извѣстной формулѣ, по которой опредѣляется измѣненіе объема какой-либо непрерывно-измѣняемой системы въ функціи начальныхъ координатъ:

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} da\, db\, dc. \tag{358}$$

По формуламъ (5), положивъ для краткости

(359) $$\alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = P,$$

можно написать:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{A_1 - \alpha x}{P}, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{B_1 - \beta x}{P}, \quad \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{C_1 - \gamma x}{P},$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{A_2 - \alpha y}{P}, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{B_2 - \beta y}{P}, \quad \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{C_2 - \gamma y}{P},$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{A_3 - \alpha z}{P}, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{B_3 - \beta z}{P}, \quad \frac{\partial z}{\partial c} = \frac{C_3 - \gamma z}{P}.$$

Поэтому формула (358) даетъ:

$$dV = \frac{1}{P^3} \begin{vmatrix} A_1 - \alpha x, & A_2 - \alpha y, & A_3 - \alpha z \\ B_1 - \beta x, & B_2 - \beta y, & B_3 - \beta z \\ C_1 - \gamma x, & C_2 - \gamma y, & C_3 - \gamma z \end{vmatrix} da\,db\,dc.$$

Разлагая опредѣлитель на сумму восьми опредѣлителей и замѣчая, что четыре изъ этихъ опредѣлителей обращаются въ нуль, имѣя одинаковые вертикальные столбцы, получимъ:

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{1}{P^3} \left\{ \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - x \begin{vmatrix} \alpha, & A_2, & A_3 \\ \beta, & B_2, & B_3 \\ \gamma, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \alpha, & A_1, & A_3 \\ \beta, & B_1, & B_3 \\ \gamma, & C_1, & C_3 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} \alpha, & A_1, & A_2 \\ \beta, & B_1, & B_2 \\ \gamma, & C_1, & C_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{P^3} \begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ \alpha, & A_1, & A_2, & A_3 \\ \beta, & B_1, & B_2, & B_3 \\ \gamma, & C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix}.$$

Подставимъ сюда вмѣсто x, y, z ихъ выраженія въ начальныхъ координатахъ по формуламъ (5):

$$\frac{dV}{dV_0}=\frac{1}{P^4}\begin{vmatrix} \alpha a+\beta b+\gamma c+1, & A_1a+B_1b+C_1c+D_1, & A_2a+B_2b+C_2c+D_2, & A_3a+B_3b+C_3c+D_3 \\ \alpha, & A_1, & A_2, & A_3 \\ \beta, & B_1, & B_2, & B_3 \\ \gamma, & C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix}$$

Если разложить этотъ опредѣлитель по элементамъ верхней строки и составить коэффиціенты при координатахъ a, b, c, то мы найдемъ, что эти коэффиціенты равны нулю, такъ какъ состоятъ изъ опредѣлителей, имѣющихъ по двѣ тождественныхъ горизонтальныхъ строки. Такимъ образомъ остается только опредѣлитель, не содержащій координатъ a, b, c, и мы получаемъ послѣ перестановокъ въ немъ элементовъ и замѣненія P его выраженіемъ (359):

$$\frac{dV}{dV_0}=\frac{1}{(\alpha a+\beta b+\gamma c+1)^4}\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \alpha \\ B_1, & B_2, & B_3, & \beta \\ C_1, & C_2, & C_3, & \gamma \\ D_1, & D_2, & D_3, & 1 \end{vmatrix}. \qquad (360)$$

Эта формула показываетъ, что то-же самое измѣненіе объема, которое произошло около точки (a, b, c), произошло и около всѣхъ точекъ, для которыхъ въ данный моментъ

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=\textit{пост.}$$

Если представить себѣ перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы произошедшимъ такимъ образомъ, что сначала она получила чистое раздвиганіе

$$\xi=\frac{a}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1},$$

$$\eta=\frac{b}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1}, \qquad (361)$$

$$\zeta=\frac{c}{\alpha a+\beta b+\gamma c+1},$$

а потомъ перемѣщеніе однородно-измѣняемой системы

$$x = A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1,$$
$$y = A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2,$$
$$z = A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3,$$

то можно сказать: ***при движеніи коллинеарно-измѣняемой системы частицы, для которыхъ объемное расширеніе, произошедшее въ нѣкоторый конечный промежутокъ времени, одно и то-же, лежали въ начальный моментъ въ плоскости, перпендикулярной къ направленію раздвиганія.*** Такимъ образомъ въ каждый моментъ существуетъ система параллельныхъ между собою плоскостей, въ которыхъ частицы имѣютъ одинаковое объемное расширеніе. Съ переходомъ отъ одной изъ этихъ плоскостей

(362) $$\alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = h$$

къ другой, къ ней безконечно-близкой

(363) $$\alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = h + \delta h,$$

объемное расширеніе мѣняется; и это измѣненіе, дѣленное на объемное расширеніе въ первой плоскости, какъ легко видѣть изъ формулы (360), обратно-пропорціонально величинѣ h и прямо-пропорціонально разстоянію между плоскостями (362) и (363). Дѣйствительно, мы имѣемъ, означая черезъ dV' элементъ объема въ плоскости (363), имѣвшій первоначально величину dV_0:

$$\frac{\frac{dV'}{dV_0} - \frac{dV}{dV_0}}{\frac{dV}{dV_0}} = -\frac{4\delta h}{h}.$$

Съ другой стороны разстояніе между плоскостями (362) и (363)

$$\delta n = \frac{\delta h}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}};$$

слѣдовательно

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \mp 4\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\,\frac{\delta n}{h}.$$

Здѣсь $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ представляетъ *величину раздвиганія* (§ 15).

Далѣе формула (360) еще показываетъ, что объемное расширеніе во всѣхъ точкахъ коллинеарно-измѣняемой системы имѣетъ въ данный моментъ одинъ и тотъ же знакъ, такъ какъ опредѣлитель не зависитъ отъ координатъ, а другой множитель существенно положительный.

C. Формулы, которыя могутъ служить для изученія измѣненія поверхностей, принадлежащихъ коллинеарно-измѣняемой системѣ.

90. Формулы, приложимыя къ какой-либо непрерывно-измѣняемой системѣ.

Изученіе какой-либо поверхности аналитическимъ путемъ сводится, какъ извѣстно, главнымъ образомъ къ изученію различныхъ зависимостей между частными производными

$$p_0=\frac{\partial f}{\partial a},\quad q_0=\frac{\partial f}{\partial b},\quad r_0=\frac{\partial^2 f}{\partial a^2},\quad s_0=\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b},\quad t_0=\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}$$

функціи $f(a, b)$, которая опредѣляетъ собою уравненіе поверхности

$$c=f(a, b). \tag{364}$$

Мы будемъ въ состояніи рѣшить вопросъ объ измѣненіи какъ величины поверхности, такъ и различныхъ другихъ элементовъ, опредѣляющихъ ея геометрическія свойства, если будемъ знать, какъ измѣняются съ теченіемъ времени вышеприведенныя частныя производныя. Для ихъ опредѣленія мы имѣемъ теперь условія:

$$\begin{aligned} dc&=p_0da+q_0db,\\ d^2c&=r_0da^2+2s_0da\,db+t_0db^2,\\ dz&=pdx+qdy,\\ d^2z&=rdx^2+2sdx\,dy+tdy^2+pd^2x+qd^2y. \end{aligned} \tag{365}$$

Принимая во вниманіе эти уравненія, уравненіе (364) и уравненія движенія (1), можемъ написать:

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial a}da + \frac{\partial f_1}{\partial b}db + \frac{\partial f_1}{\partial c}(p_0 da + q_0 db),$$

(366) $$dy = \frac{\partial f_2}{\partial a}da + \frac{\partial f_2}{\partial b}db + \frac{\partial f_2}{\partial c}(p_0 da + q_0 db),$$

$$dz = \frac{\partial f_3}{\partial a}da + \frac{\partial f_3}{\partial b}db + \frac{\partial f_3}{\partial c}(p_0 da + q_0 db).$$

Время t мы считаемъ при этомъ постояннымъ, разсматривая положеніе поверхности для одного опредѣленнаго момента. Подставивъ (366) въ (365) и сравнивая отдѣльно коэффиціенты при da и db, что можно сдѣлать, потому что da и db произвольны,—получимъ два уравненія для опредѣленія p и q:

$$p\left(\frac{\partial f_1}{\partial a} + p_0\frac{\partial f_1}{\partial c}\right) + q\left(\frac{\partial f_2}{\partial a} + q_0\frac{\partial f_2}{\partial c}\right) = \frac{\partial f_3}{\partial a} + p_0\frac{\partial f_3}{\partial c},$$

$$p\left(\frac{\partial f_1}{\partial b} + p_0\frac{\partial f_1}{\partial c}\right) + q\left(\frac{\partial f_2}{\partial b} + q_0\frac{\partial f_2}{\partial c}\right) = \frac{\partial f_3}{\partial b} + q_0\frac{\partial f_3}{\partial c}.$$

Отсюда, положивъ

$$D_{23} = \begin{vmatrix} p_0, & q_0, & -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a}, & \frac{\partial f_2}{\partial b}, & \frac{\partial f_2}{\partial c} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a}, & \frac{\partial f_3}{\partial b}, & \frac{\partial f_3}{\partial c} \end{vmatrix},$$

(367) $$D_{31} = \begin{vmatrix} p_0, & q_0, & -1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial a}, & \frac{\partial f_3}{\partial b}, & \frac{\partial f_3}{\partial c} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a}, & \frac{\partial f_1}{\partial b}, & \frac{\partial f_1}{\partial c} \end{vmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} p_0, & q_0, & -1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial a}, & \frac{\partial f_1}{\partial b}, & \frac{\partial f_1}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a}, & \frac{\partial f_2}{\partial b}, & \frac{\partial f_2}{\partial c} \end{vmatrix},$$

находимъ:

$$p = -\frac{D_{23}}{D_{12}}, \quad q = -\frac{D_{31}}{D_{12}}, \tag{368}$$

Для опредѣленія r, s, t имѣются зависимости:

$$dp = rdx + sdy,$$
$$dq = sdx + tdy,$$

которыя, подобно тому какъ это сдѣлано выше, можно замѣнить слѣдующими:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial a} + p_0\frac{\partial p}{\partial c}\right)da + \left(\frac{\partial p}{\partial b} + q_0\frac{\partial p}{\partial c}\right)db$$
$$= r\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial a} + p_0\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)da + \left(\frac{\partial f_1}{\partial b} + q_0\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)db\right]$$
$$+ s\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial a} + p_0\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)da + \left(\frac{\partial f_2}{\partial b} + q_0\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)db\right],$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial a} + p_0\frac{\partial q}{\partial c}\right)da + \left(\frac{\partial q}{\partial b} + q_0\frac{\partial q}{\partial c}\right)db$$
$$= s\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial a} + p_0\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)da + \left(\frac{\partial f_1}{\partial b} + q_0\frac{\partial f_1}{\partial c}\right)db\right]$$
$$+ t\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial a} + p_0\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)da + \left(\frac{\partial f_2}{\partial b} + q_0\frac{\partial f_2}{\partial c}\right)db\right].$$

Сравнивая отдѣльно коэффиціенты при da и db въ каждомъ изъ уравненій и полагая

$$D_{p,1} = \begin{vmatrix} p_0, & q_0, & -1 \\ \frac{\partial p}{\partial a}, & \frac{\partial p}{\partial b}, & \frac{\partial p}{\partial c} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a}, & \frac{\partial f_1}{\partial b}, & \frac{\partial f_1}{\partial c} \end{vmatrix}, \quad D_{2,p} = \begin{vmatrix} p_0, & q_0, & -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a}, & \frac{\partial f_2}{\partial b}, & \frac{\partial f_2}{\partial c} \\ \frac{\partial p}{\partial a}, & \frac{\partial p}{\partial b}, & \frac{\partial p}{\partial c} \end{vmatrix},$$

$$D_{q,1} = \begin{vmatrix} p_0, & q_0, & -1 \\ \frac{\partial q}{\partial a}, & \frac{\partial q}{\partial b}, & \frac{\partial q}{\partial c} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a}, & \frac{\partial f_1}{\partial b}, & \frac{\partial f_1}{\partial c} \end{vmatrix}, \quad D_{2,q} = \begin{vmatrix} p_0, & q_0, & -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial a}, & \frac{\partial f_2}{\partial b}, & \frac{\partial f_2}{\partial c} \\ \frac{\partial q}{\partial a}, & \frac{\partial q}{\partial b}, & \frac{\partial q}{\partial c} \end{vmatrix}, \tag{369}$$

получимъ:

$$(370)\quad r = -\frac{D_{2,p}}{D_{12}},\quad s = -\frac{D_{2,q}}{D_{12}} = -\frac{D_{p,1}}{D_{12}},\quad t = -\frac{D_{q,1}}{D_{12}}.$$

При помощи зависимости (364) p, q, r, s, t могутъ быть при этомъ выражены только въ функціи a, b и времени.

Пользуясь найденными формулами, можно выразить деформированную поверхность въ зависимости отъ начальныхъ координатъ и такимъ образомъ опредѣлить измѣненіе какой угодно конечной части поверхности, произошедшее въ конечный промежутокъ времени. Замѣняя для этого въ интегралѣ

$$(371)\qquad S = \pm \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

взятомъ между заданными предѣлами, перемѣнныя x, y начальными координатами a и b, по формуламъ (368), получимъ:

$$S = \mp \iint \frac{\sqrt{D_{23}{}^2 + D_{31}{}^2 + D_{12}{}^2}}{D_{12}} D \,.\, da db,$$

гдѣ D функціональный опредѣлитель

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} + p_0 \frac{\partial f_1}{\partial c}, & \frac{\partial f_1}{\partial b} + q_0 \frac{\partial f_1}{\partial c} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} + p_0 \frac{\partial f_2}{\partial c}, & \frac{\partial f_2}{\partial b} + q_0 \frac{\partial f_2}{\partial c} \end{vmatrix};$$

но онъ очевидно равенъ $-D_{12}$; поэтому

$$(372)\qquad S = \pm \iint \sqrt{D_{23}{}^2 + D_{31}{}^2 + D_{12}{}^2}\, da db,$$

гдѣ предѣлы интегрированія опредѣляются тѣмъ-же контуромъ какъ и въ интегралѣ (371), но только въ его начальномъ положеніи.

91. Приложеніе предыдущихъ формулъ къ коллинеарно-измѣняемой системѣ.

Такъ какъ деформація и измѣненіе величины поверхности обусловливаются только „чистою деформаціей“, то достаточно взять уравненія, опредѣляющія раздвиганія и удлиненія системы. Предполагая, что раздвиганія предшествуютъ удлиненіямъ, можно взять формулы (361) и

$$x = E_1\xi,\ y = E_2\eta,\ z = E_3\zeta,$$

такъ-что уравненія движенія будутъ слѣдующія: [1]).

$$x = \frac{E_1 a}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$
$$y = \frac{E_2 b}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1}, \qquad (373)$$
$$z = \frac{E_3 c}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1}.$$

Прилагая къ этимъ уравненіямъ формулы (367), получимъ:

$$D_{23} = \frac{E_2 E_3}{(\alpha a + \beta b + \gamma c + 1)^3}\left[p_0\,(\alpha a + 1) + q_0\,\alpha b - \alpha c\right],$$
$$D_{31} = \frac{E_3 E_1}{(\alpha a + \beta b + \gamma c + 1)^3}\left[p_0\,\beta a + q_0\,(\beta b + 1) - \beta c\right], \qquad (374)$$
$$D_{12} = \frac{E_1 E_2}{(\alpha a + \beta b + \gamma c + 1)^3}\left[p_0\,\gamma a + q_0\,\gamma b - (\gamma c + 1)\right].$$

Чтобы составить выраженія (369), опредѣлимъ $\frac{\partial p}{\partial a}, \frac{\partial p}{\partial b}, \frac{\partial p}{\partial c}, \frac{\partial q}{\partial a}, \frac{\partial q}{\partial b}, \frac{\partial q}{\partial c}$. Мы теперь должны принять

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \left(\frac{\partial p}{\partial a}\right) + \frac{\partial p}{\partial p_0}\,r_0 + \frac{\partial p}{\partial q_0}\,s_0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial b} = \left(\frac{\partial p}{\partial b}\right) + \frac{\partial p}{\partial p_0}\,s_0 + \frac{\partial p}{\partial q_0}\,t_0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial c} = \left(\frac{\partial p}{\partial c}\right),$$

причемъ $\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial p}{\partial b}\right)$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial c}\right)$ выражаютъ частныя производныя по

---

[1]) Хотя здѣсь предполагается, что главныя удлиненія происходятъ постоянно по осямъ координатъ, но формулы (373) представляютъ тѣмъ не менѣе общій случай чистой деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы, ибо направленіе раздвиганія не совпадаетъ ни съ однимъ изъ направленій главныхъ удлиненій.

a, b, c, входящимъ явнымъ образомъ въ выраженіе для p и члены $\frac{\partial p}{\partial c}\, p_0$ и $\frac{\partial p}{\partial c}\, q_0$ отброшены, потому-что при выводѣ формулъ (369) производная $\frac{\partial p}{\partial c}$ написана отдѣльно. По формуламъ (368) и (374).

(375)
$$p = -\frac{E_3}{E_1}\frac{p_0(\alpha a + 1) + q_0\, \alpha b - \alpha c}{p_0\, \gamma a + q_0\, \gamma b - (\gamma c + 1)},$$
$$q = -\frac{E_3}{E_2}\frac{p_0\, \beta a + q_0\, (\beta b + 1) - \beta c}{p_0\, \gamma a + q_0\, \gamma b - (\gamma c + 1)}.$$

Отсюда

(376)
$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{E_3}{E_2}\frac{(p_0 + s_0 b)\, (\alpha + \gamma p_0) + r_0\, (\alpha a - \gamma b q_0 + \gamma c + 1)}{[\, p_0\, \gamma a + q_0 \gamma b - (\gamma c + 1)\,]^2},$$
$$\frac{\partial p}{\partial b} = \frac{E_3}{E_1}\frac{(q_0 + t_0 b)\, (\alpha + \gamma p_0) + s_0\, (\alpha a - \gamma b q_0 + \gamma c + 1)}{[\, p_0\, \gamma a + q_0 \gamma b - (\gamma c + 1)\,]^2},$$
$$\frac{\partial p}{\partial c} = -\frac{E_3}{E_1}\frac{\alpha + \gamma p_0}{[\, p_0\, \gamma a + q_0\, \gamma b - (\gamma c + 1)\,]^2}.$$

Полагая для сокращенія

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = P,$$
$$\alpha + \gamma p_0 = A, \quad \beta + \gamma q_0 = B,$$

можно формулы (376) такъ представить:

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{E_3}{E_1}\frac{A\, (p_0 + s_0 b) + (P - bB)\, r_0}{(aA + bB - P)^2},$$
$$\frac{\partial p}{\partial b} = \frac{E_3}{E_1}\frac{A\, (q_0 + t_0 b) + (P - bB)\, s_0}{(aA + bB - P)^2},$$
$$\frac{\partial p}{\partial c} = -\frac{E_3}{E_1}\frac{A}{(a\, A + bB - P)^2}.$$

Подобнымъ-же образомъ выразятся $\frac{\partial q}{\partial a}$, $\frac{\partial q}{\partial b}$ и $\frac{dq}{\partial c}$. Послѣ этого по формуламъ (369) и (373) получимъ:

$$D_{p,1} =$$

$$D_{2,q} = \frac{E_3\{aB(P-bB)r_0+[aB.bA+(P-aA)(P-bB)]s_0+bA(P-aA)t_0\}}{P^2(aA+bB-P)^2},$$

$$D_{2,p} = \frac{E_2E_3\,[\,(P-bB)^2\,r_0+2bA\,(P-bB)\,s_0+(bA)^2\,t_0\,]}{E_1\,P^2\,(aA+bB-P)^2}, \tag{377}$$

$$D_{q,1} = \frac{E_3E_1\,[\,(aB)^2\,r_0+2aB\,(P-aA)\,s_0+(P-aA)^2\,t_0\,]}{E_2\,P^2\,(aA+bB-P)^2}.$$

Наконецъ по формуламъ (370), (374) и (377):

$$r =$$

$$-\frac{E_3}{E_1^2}\cdot\frac{P}{(aA+bB-P)^3}\,[\,(P-bB)^2\,r_0+2\,(P-bB)\,bAs_0+(bA)^2\,t_0],$$

$$s = -\,\frac{E_3}{E_1E_2}\cdot\frac{P}{(aA+bB-P)^3} \tag{378}$$

$$\times\,\{a\,B\,(P-bB)\,r_0+[aB\,.\,b\,A+(P-aA)\,(P-bB)\,]\,s_0+bA\,(P-aA)\,t_0\}$$

$$t =$$

$$-\frac{E_3}{E_2^2}\cdot\frac{P}{(aA+bB-P)^3}\,[\,(aB)^2\,r_0+2\,(P-aA)\,aB.s_0+(P-aA)^2\,t_0].$$

92. Нѣкоторыя приложенія предыдущихъ формулъ.

Изъ числа различныхъ приложеній, которыя могутъ имѣть эти формулы, выберемъ слѣдующіе два простыхъ вопроса.

I. Можетъ-ли деформація однородно-измѣняемой системы происходить такимъ образомъ, чтобы величина всякой произвольно выбранной части поверхности, составленной изъ точекъ этой системы, оставалась постоянною?

Это можетъ вообще говоря быть только тогда, когда подъинтегральная функція въ формулѣ (372) тожественно равна $\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}$; потому что какую-бы часть поверхности мы ни выбрали, мы должны, опредѣляя величину ея въ начальномъ положеніи по формулѣ

$$S_0 = \iint\sqrt{1+p_0^2+q_0^2}\,da\,db, \tag{379}$$

и въ какомъ-либо другомъ положеніи по формулѣ (372), взять одни и тѣ-же предѣлы интегрированія, такъ какъ формула (372) отнесена къ начальнымъ перемѣннымъ. Мы поставили условіе, чтобы *произвольно*

выбранная часть поверхности не мѣняла своей величины; слѣдовательно интегралы (379) и (372) должны быть равны при всякихъ предѣлахъ интегрированія. А это возможно только, если подъинтегральныя функціи тождественно равны.

Для однородно-измѣняемой системы, подверженной чистой деформаціи по осямъ координатъ:

$$D_{23} = E_2 E_3 p_0, \quad D_{31} = E_3 E_1 q_0, \quad D_{13} = - E_1 E_2.$$

Слѣдовательно должно быть тождественно выполнено условіе:

$$E_2^2 E_3^2 p_0^2 + E_3^2 E_1^2 q_0^2 + E_1^2 E_2^2 = p_0^2 + q_0^2 + 1.$$

Если p_0 и q_0 произвольно заданныя функціи координатъ a, b, то это тожество требуетъ, чтобы

$$E_2^2 E_3^2 = 1, \quad E_3^2 E_1^2 = 1, \quad E_1^2 E_2^2 = 1;$$

а это равносильно условіямъ:

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 1, E_3 = 1.$$

Итакъ поставленное условіе для однородно-измѣняемой системы можетъ быть выполнено (если p_0 и q_0 суть обѣ функціи координатъ a и b) только такимъ образомъ, что система вовсе не претерпѣваетъ измѣненій.

Если-же одна изъ величинъ p_0, q_0 отъ координатъ не зависитъ, то поставленное требованіе можетъ быть выполнено и съ сохраненіемъ измѣняемости. Пусть напр. p_0 постоянное; означимъ его черезъ P_0. Условіе

$$E_2^2 E_3^2 P_0^2 + E_3^2 E_1^2 q_0 + E_1^2 E_2^2 = P_0^2 + q_0^2 + 1$$

должно быть выполнено при всякомъ значеніи q_0; а потому

(380) $$E_3^2 E_1^2 = 1,$$

(381) $$(E_2^2 E_3^2 - 1) P_0^2 + E_1^2 E_2^2 - 1 = 0.$$

Такимъ образомъ теперь одна изъ величинъ E_1, E_2, E_3 можетъ быть задана произвольною функціей времени и система можетъ оставаться непрерывно-измѣняемою. Какъ извѣстно, p_0 постоянно для цилиндрическихъ поверхностей, производящія которыхъ параллельны плоскости $(z\ x)$; точно такъ-же q_0 постоянно для цилиндрическихъ поверхностей,

производящія которыхъ параллельны плоскости (yz). А именно въ первомъ случаѣ мы должны принять

$$c = P_0\,a + f\,(b),$$

а во второмъ случаѣ

$$c = Q_0\,b + \varphi\,(a).$$

Итакъ формулы (380) и (381) показываютъ, что при перемѣщеніи однородно-измѣняемой системы всякая часть поверхности, составленной изъ ея точекъ, сохраняетъ между прочимъ свою величину, если будутъ выполнены слѣдующія условія: 1) поверхность должна быть цилиндрическая; 2) производящія ея должны быть параллельны одной изъ плоскостей главныхъ удлиненій; 3) произведеніе удлиненій въ этой плоскости должно быть равно единицѣ; 4) третіе удлиненіе должно находиться въ слѣдующей зависимости отъ первыхъ двухъ:

$$E_2{}^2 = \frac{1 + P_0{}^2}{E_1{}^2 + E_3{}^2\,P_0{}^2} = \frac{1}{E_1{}^2\;cos^2\alpha\;+\;E_2{}^2\;sin^2\,\alpha},$$

гдѣ α уголъ производящихъ поверхности съ плоскостью главныхъ удлиненій $(E_1\,,\,E_2)$.

Понятно, что всякая плоскость можетъ быть разсматриваема какъ цилиндрическая поверхность; поэтому и къ ней приложимы предыдущія условія.

Въ частности, если производящія параллельны одному изъ главныхъ удлиненій, послѣднее условіе будетъ проще: тогда

$$P_0 = 0$$

и поэтому

$$E_3{}^2 E_1{}^2 = 1\,,\quad E_1{}^2 E_2{}^2 = 1\,;$$

откуда

$$E_2 = E_3. \tag{382}$$

Слѣдовательно условіе (4) можно замѣнить слѣдующимъ: удлиненія въ плоскости, перпендикулярной къ производящимъ цилиндрической поверхности, должны быть равны. Такимъ образомъ наприм. однородная по плотности, тонкостѣнная цилиндрическая трубка съ круговымъ поперечнымъ сѣченіемъ и постоянною толщиною стѣнки не можетъ, оставаясь системою *однородно-измѣняемою*, деформироваться въ трубку съ эллиптическимъ поперечнымъ сѣченіемъ и одинаковою съ прежнею трубкою величиною поверхности; ибо въ противномъ случаѣ условіе (382) не было-бы выполнено.

II. Извѣстно, что линейчатая поверхность, составленная изъ точекъ коллинеарно-измѣняемой системы, всегда остается линейчатою. Спрашивается, можетъ-ли неразвертывающаяся поверхность сдѣлаться развертывающеюся и обратно.

Условіе, чтобы линейчатая поверхность была развертывающеюся, состоитъ, какъ извѣстно, въ томъ, чтобы

(383) $$rt - s^2 = 0.$$

Обращаясь къ формуламъ (378), мы находимъ:

(384) $$rt - s^2 = \frac{E_3^2}{E_1^2 E_2^2} \frac{P^4}{(aA + bB - P)^4} (r_0 t_0 - s_0^2)$$

и видимъ такимъ образомъ, что если для всѣхъ точекъ начальной поверхности

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0,$$

то и послѣ деформаціи условіе (383) будетъ выполнено, если только P не равно безконечности или $aA + bB - P$ не равно нулю. Но ни то ни другое вообще говоря не возможно, такъ какъ при

$$P = \alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = \infty$$

всѣ точки системы сливаются въ одну точку, а слѣдовательно и данная поверхность перестаетъ существовать. Второе предположеніе,

(385) $$aA + bB - P = 0,$$

равносильно слѣдующему:

$$\gamma = \frac{1}{ap_0 + bq_0 - c}.$$

Но γ не зависитъ отъ координатъ; поэтому условіе (385) приводитъ къ условію

(386) $$ap_0 + bq_0 - c = пост.,$$

т. е. чтобы данная поверхность была коническою. Но коническая поверхность въ коллинеарно-измѣняемой системѣ всегда остается конической. Дѣйствительно, если существуетъ уравненіе (386), то будетъ существовать условіе

$$xp + yq - z = пост.$$

Въ этомъ можно убѣдиться, подставивъ сюда выраженія (373 и (375).

Итакъ, развертывающаяся поверхность всегда остается развертывающеюся. Отсюда можно заключить, что и обратно, если начальная линейчатая поверхность не была развертывающеюся, то она не можетъ обратиться въ развертывающуюся; потому-что, если-бы это было возможно, то при приведеніи системы обратно въ первоначальное положеніе эта развертывающаяся поверхность обратилась-бы опять въ косую, что невозможно по доказанному выше.

Понятно, что всѣ эти разсужденія относятся и къ однородно-измѣняемой системѣ; для нея уравненіе (384) имѣетъ еще болѣе простой видъ:

$$rt - s^2 = \frac{E_3^{\,2}}{E_1^{\,2} E_2^{\,2}} (r_0 t_0 - s_0^{\,2}).$$



ПОЛОЖЕНІЯ.

1. Кинематику коллинеарно-измѣняемой системы можно разсматривать какъ такое наиболѣе возможное обобщеніе кинематики неизмѣняемой, подобно-измѣняемой и однородно-измѣняемой системъ, при которомъ основныя кинематическія свойства этихъ тѣлъ еще сохраняются.

2. Характерный для коллинеарно-измѣняемой системы параметръ деформаціи, *раздвиганіе,* аналогиченъ по своимъ свойствамъ другимъ кинематическимъ элементамъ. Напр. раздвиганія съ общимъ центромъ слагаются по закону геометрическаго сложенія; параллельныя раздвиганія слагаются аналогично тому, какъ угловыя скорости около параллельныхъ осей.

3. Составное перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы, полученное отъ двухъ послѣдовательныхъ конечныхъ раздвиганій, зависитъ отъ того, въ какомъ порядкѣ эти раздвиганія производились; но вліяніе порядка слагаемыхъ раздвиганій исчезаетъ, если ихъ совокупность даетъ опять простое раздвиганіе.

4. Одно изъ существенныхъ отличій коллинеарно-измѣняемой системы отъ системы однородно-измѣняемой состоитъ въ томъ, что скорости удлиненій векторовъ зависятъ нетолько отъ ихъ направленій, но также отъ ихъ длинъ и положеній относительно центра раздвиганій.

5. Для того, чтобы „однообразное движеніе“ (§ 10) коллинеарно-измѣняемой системы было установившимся, нужно, чтобы траекторія „основной точки“ (§ 10) была такого-же вида, какъ самоогибаемыя кривыя въ общемъ случаѣ движенія коллинеарно-измѣняемой системы.

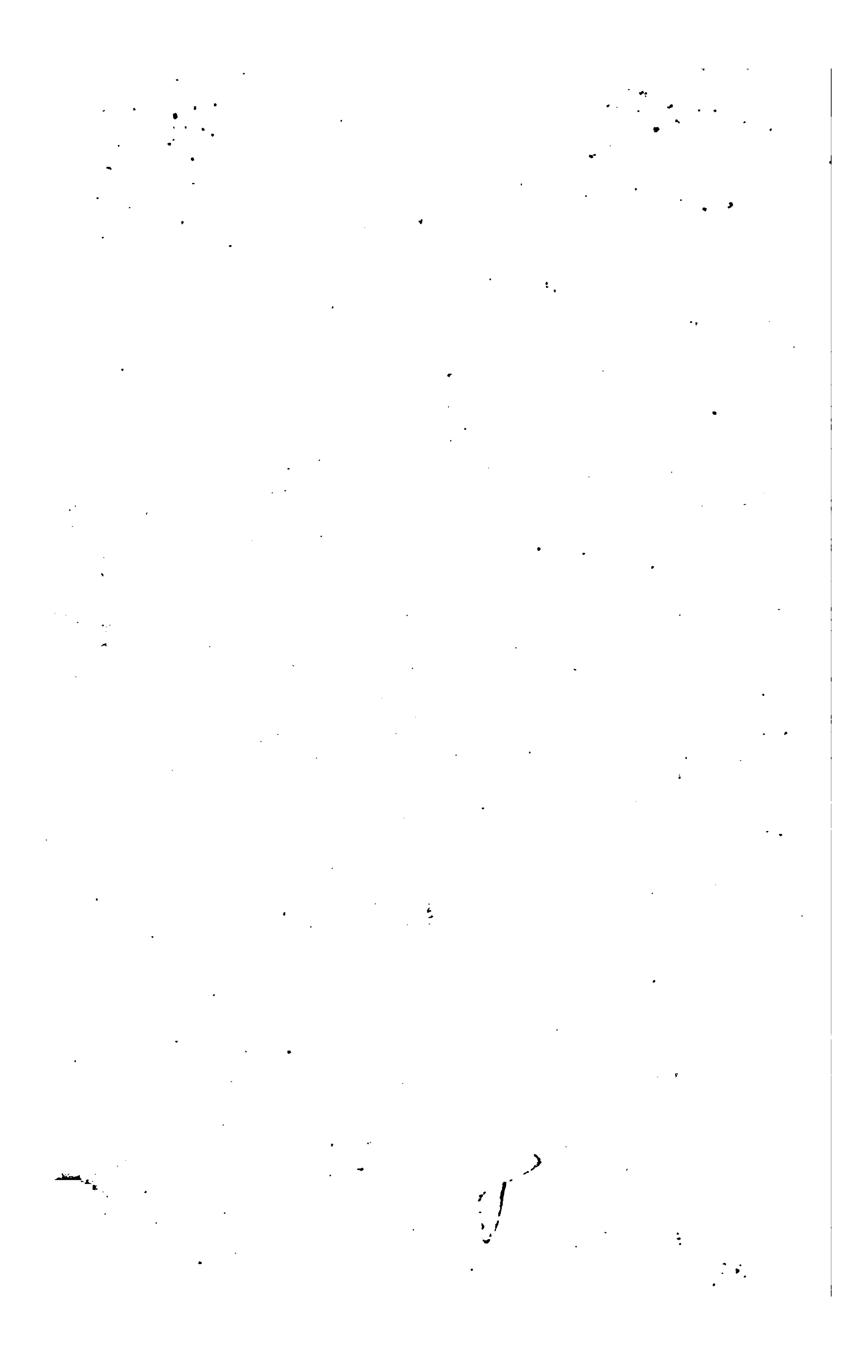
6. Скорость сдвиганія, происходящаго въ какой-нибудь произвольной плоскости и по какому-нибудь направленію, не можетъ быть разсматриваема составленною изъ трехъ скоростей сдвиганія въ координатныхъ плоскостяхъ по координатнымъ осямъ.

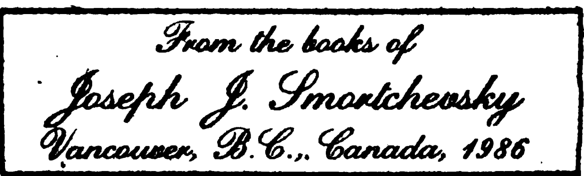
7. Между распредѣленіемъ скоростей и распредѣленіемъ ускореній въ чистой деформаціи однородно-измѣняемой системы не существуетъ полной аналогіи.

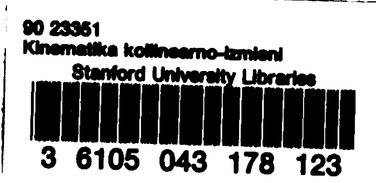
8. Линіи самоогибаемыя въ движеніи какой-нибудь измѣняемой системы играютъ такую-же роль, какъ винтовыя линіи въ движеніи твердаго тѣла.

9. Вопросъ о вліяніи порядка послѣдовательныхъ перемѣщеній какой-либо измѣняемой системы на получаемое при этихъ перемѣщеніяхъ положеніе системы находится въ тѣсной связи съ теоріею подстановокъ. Примѣненіе этой теоріи къ конечнымъ перемѣщеніямъ такихъ измѣняемыхъ системъ, движеніе которыхъ опредѣляется алгебраическими функціями, представляетъ интересное приложеніе чисто алгебраическихъ изслѣдованій къ кинематикѣ. Желательно, чтобы эти вопросы, въ настоящее время едва затронутые (Klein und Lie, Math. Annalen, 1871), были разработаны въ большей полнотѣ.






From the books of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986


90 23351
Kinematika kollinearno-izmieni
Stanford University Libraries
3 6105 043 178 123

